Staatl. Bibliothek
Regensburg

1. 170. 3.

Philos 2517

(2, 2

Die ersten

Anfangsgründe

der

Geometrie

als Stoff

zu

Denk- und Sprechübungen

benützt.

Zum Gebrauche für ungeübte Lehrer in Bürgerschulen und den untern Classen der Gymnasien

herausgegeben

von

D. J. P. Pöhlmann.

Zweyten Bändchens zweyte Hälfte.

Fürth,
im Bureau für Litteratur.
1806.

Staatl. Bibliothek
Regensburg

Vorrede.

Meinem ursprünglichen Plane gemäß sollte diese 2te Hälfte zugleich auch dasjenige aus der Stereometrie enthalten, was Anfängern davon beygebracht werden kann und muß. Allein bey reiflicherer Uiberlegung der Sache habe ich diesen Vorsatz wieder aufgegeben und mir dagegen vorgenommen, den erwähnten Theil der Geometrie in einem besondern Bändchen zu liefern. Der Grund, welcher mich hiezu bestimmt hat, ist folgender:

Vorrede.

Beym Unterricht in der Planimetrie ist es nicht durchaus nothwendig, daß sich Lehrer einen Versinnlichungsapparat anschaffen, indem sie sich mit den gewöhnlichen Verzeichnungen der Figuren zur Noth behelfen können. Dieß ist aber nicht der Fall beym Vortrage der Stereometrie. Hier müssen die Körper selbst, wovon die Rede ist, nothwendig vorgelegt werden, wenn anders die Kinder deutliche Vorstellungen und Begriffe von denselben erhalten und die darauf Bezug habenden Fragen verstehen und richtig beantworten sollen. Oder glaubt man etwa, daß ein Kind, welches nie ein Icosaëdrum gesehen hat, von diesem Körper eine richtige Vorstellung bekommen werde, wenn man ihm eine Zeichnung davon vorlegt oder denselben beschreibt? Nimmermehr! Habe ich doch Studenten gekannt, welche sich von mehrern mathematischen Körpern, deren Abbildungen in ihren Compendien ihnen vor Augen lagen, nicht eher eine richtige Vorstellung machen konnten, als bis sie diese Körper selbst gesehen hatten.

Wegen

Wegen dieser Unzulänglichkeit der Abbildungen mathematischer Körper bey den ersten Anfängern in der Geometrie bin ich also genöthigt, mich in meinen Unterredungen auf wirkliche Körper zu beziehen. Natürlich können diese Unterredungen auch nur dem, der diese Körper, (deren Flächen gerade mit den von mir gebrauchten Zeichen versehen sind,) vor sich hat, nützlich seyn, weßhalb sich jeder, der sich die erstern anschafft, auch nothwendig in den Besitz der letztern setzen muß. Da aber der Fall eintreten kann, daß manche Käufer dieses Werkchens entweder kein Geld, oder keine Lust haben, sich besagte Körper anzuschaffen; so würden diese, wenn ich meinem ursprünglichen Plane treu geblieben wäre, in dieser 2ten Hälfte mehrere Bogen mit bezahlen müssen, die für sie nicht brauchbar wären. Um dieß zu verhindern, habe ich die erwähnte Aenderung getroffen. Freylich steht nun diese 2te Hälfte in Ansehung der Bogenzahl mit der ersten nicht im gehörigen Verhält-

nisse.

niße. Allein dieß schien mir ein geringerer Uibelstand zu seyn, als wenn ich mehrere Käufer in den Fall setzte, 6—8 für sie unbrauchbare Bogen kaufen zu müssen. Bey der jetzt getroffenen Einrichtung steht es jedem frey, ob er sich die Unterhaltungen über stereometrische Wahrheiten mit dem dazu nöthigen dritten Theile meines Versinnlichungsapparats anschaffen will oder nicht.

Erlangen, den 28sten April 1806.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniß.

Dritter Abschnitt.

Seite

58ster Satz. Ein Rechteck auszumessen. 1

59ster Satz. Ein Quadrat auszumessen. 10

60ster Satz. Den Flächenraum eines schiefwinklichten Parallelogramms zu finden. 13

61ster Satz. Parallelogramme verhalten sich zu einander, wie die Producte aus ihren Höhen in ihre Grundlinien. 21

62ster Satz. Den Flächenraum eines Dreyecks zu finden. 38

63ster Satz. Dreyecke verhalten sich zu einander, wie die Producte aus ihren Höhen in ihre Grundlinien. 42

64ster Satz. Den Flächeninhalt eines Polygons zu finden. 50

65ster Satz. Ein Dreyeck gleicht einer regulären Figur, wenn 2c. 54

66ster

Inhaltsverzeichniß.

Seite

66ster Satz. Jeder Kreis ist ein reguläres Polygon, und folglich einem Dreyecke gleich, welches &c. 58

67ster Satz. Die Peripherie eines Kreises zu berechnen. 62

68ster Satz. a. Den Flächeninhalt eines Kreises zu finden. 69

68ster Satz. b. Den Inhalt eines Ringes zu finden. 80.

Vierter Abschnitt.

69ster Satz. Wenn man in einem Dreyecke eine Linie mit einer Seite desselben bis an die andern 2 Seiten parallel zieht, so werden dadurch diese 2 Seiten proportionirt geschnitten. 88

70ster Satz. Wenn eine Linie 2 Seiten eines Dreyecks proportionirt schneidet, so ist sie der dritten Seite desselben parallel. 98

71ster Satz. Wenn in einem Dreyecke zwey Winkel einzeln genommen eben so groß sind, als 2 Winkel in einem andern Dreyecke; so sind beyde Figuren einander ähnlich. 102

72ster Satz. Wenn man in einem Triangel eine Linie mit einer Seite parallel zieht und sie bis an die übrigen beyden Seiten verlängert; so muß der dadurch abgeschnittene kleinere Triangel dem größern ähnlich seyn. 107

73ster Satz. Parallelen, welche die Schenkel eines Winkels schneiden, sind den Abschnitten derselben proportionirt. 109

74ster

Inhaltsverzeichniß.

Seite

74ster Satz. Wenn zwey Dreyecke einen Winkel gleich und die ihn einschließenden Seiten proportionirt haben; so sind sie einander ähnlich. 112

75ster Satz. Zwey Dreyecke, deren Seiten proportionirt sind, sind einander ähnlich. 116.

76ster Satz. Zu drey gegebenen Linien die 4te Proportionallinie zu finden. 121

77ster Satz. Zu zwey gegebenen Linien die 3te Proportionallinie zu finden. 125

78ster Satz. Zu zwey gegebenen Linien die mittlere Proportionallinie zu finden. 126

79ster Satz. Die senkrechte Linie, welche man in einem rechtwinklichten Triangel auf die Hypotenuse ziehen kann, ist die mittlere Proportionallinie ꝛc. 133

80ster Satz. Die aus einem beliebigen Puncte der Peripherie eines Kreises auf den Durchmesser desselben senkrecht gezogene Linie ist die mittlere Proportionallinie ꝛc. 135

81ster Satz. Zwey Seiten eines Dreyecks werden auch dann proportionirt geschnitten, wenn man innerhalb derselben mehrere Linien mit einer seiner Seiten parallel zieht. 137

82ster Satz. Jede gegebene Linie in so viel gleiche Theile zu theilen als man will. 141

83ster Satz. Sind zwey Figuren einander ähnlich, so verhalten sich ihre Umringe, wie zwey ihrer ähnlich liegenden Seiten. 149

84ster

Seite

84ster Satz. Alle ähnliche Figuren können durch Diagonalen aus gleichen Winkeln in ähnliche Dreyecke zerlegt werden. 153

85ster Satz. Die Umringe ähnlicher Figuren verhalten sich zu einander, wie Diagonalen, die aus gleichen Winkeln gezogen werden. 155

86ster Satz. Kreisflächen verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Durchmesser. 160

87ster Satz. Ein auf der Hypotenuse beschriebener Kreis ist so groß, als die auf den beyden Katheten beschriebenen zusammen genommen. 165

88ster Satz. Die Kreisfläche verhält sich zum Quadrate des Durchmessers wie 785 : 1000. 168

Dritter Abschnitt.

Von der Ausmessung und Ausrechnung der Figuren.

Acht und funfzigster Satz.

Aufgabe.

Lehrer. So wie man im gemeinen Leben sehr oft in den Fall kommt, gerade Linien, d. h. bloß Längen, z. B. die Länge eines Bretes, eines Bandes, eines Seiles, einer Hecke ausmessen zu müssen; so ist es auch öfters nöthig, daß wir Flächen, z. B. Gärten, Wiesen, Felder, Stubenböden ausmessen. Aus diesem Grunde will ich mich von nun an bemühen, euch die Geschicklichkeit, die Größe einer Fläche zu finden, beyzubringen. Daß man zum Maßstabe einer Fläche keine Linie nehmen dürfe, sondern dazu wieder eine Fläche wählen müsse, habe ich euch schon längst einmahl gesagt *), und zugleich habe ich euch die Figur genannt, welche man derjenigen Fläche, die man zum Maße anderer Flächen nimmt, gegeben hat. Wer kann mir den Namen

*) Seite 116 des ersten Bändchens.

Namen dieser Figur wieder angeben? Kind. Quadrat.

L. Warum hat man denn wohl dem Flächenmaße gerade diese Figur gegeben? K. Weil man mit demselben Flächen am bequemsten messen kann *).

L. Wie groß ist denn die Seite des Quadrates, welches zum Maßstabe für andere Flächen dient? K. Sie kann eine Meile, eine Ruthe, einen Schuh, einen Zoll ꝛc. lang seyn.

L. Wißt ihr auch noch, wie man Quadrate, deren Seiten die erst angegebenen Längen haben, nennt? K. Quadratmeilen, Quadratruthen ꝛc. —

L. Jetzt sagt mir, was das eigentlich heißt, wenn ich spreche: meßt diese Fläche **) mit diesem (wirklich vorgelegten) Quadratschuhe. K. Das heißt: seht, wie oft dieser Quadratschuh, als die bekannte Größe, in dieser Fläche, als der unbekannten Größe, enthalten ist.

L. Könnt ihr mir denn wohl sagen, wie ihr es anfangen müßt, wenn ihr diese Fläche, die ein Rechteck ist, mit Hülfe dieses Quadratschuhes wirklich messen wollt? K. Ja freylich. Wir dürfen nur diesen Quadratschuh so oft auf diese (zu messende) Fläche legen, als es angeht, und dabey merken, wie oft wir ihn hinlegen.

L. Macht

*) Dieß wurde S. 122 des 1ten Bds. gesagt.

**) Hier zeige ich auf ein 4 Schuh langes und 2 Schuh breites Rechteck, welches ich auf einer großen schwarzen Tafel oder auf einem Tische beschrieben habe.

L. Macht es einmahl so. K. (messen, und der Lehrer ist ihnen hiezu behülflich und zeigt, wie sie den Quadratschuh anlegen und mit Kreide nach und nach die Linien bemerken müssen, die auf der zu messenden Fläche immer einen Quadratschuh begrenzen, so daß diese Fläche nach und nach in lauter gleiche Quadrate, wie Fig. 1. Tab. I. abgetheilt wird.)

L. Jetzt habt ihr dieses Rechteck ausgemessen, und ihr könnt mir nun seinen Flächeninhalt angeben. Thut dieses und sagt mir, wie groß es ist. K. Es ist 8 Quadratschuh groß (enthält 8 □').

L. Wie viel von diesen 8 Quadratschuhen liegen denn in einer Reihe von A nach B? K. Vier.

L. Und wie viel solcher Reihen liegen hinter oder über einander, nämlich von A nach C? K. Zwey.

L. Wie lang muß denn wohl die Linie (Seite) A B seyn, da man gerade vier gleiche Quadrate, deren Seite = 1 Schuh ist, neben einander darauf hinstellen kann? K. Vier Schuh.

L. Und wie breit oder hoch muß dieses Rechteck seyn? K. Gerade 2 Schuh.

L. Warum glaubt ihr dieses? K. Weil gerade zwey Reihen von Quadratschuhen neben einander darin Platz haben. (Weil gerade 2 Quadratschuhe an der Seite A C, die die Breite oder Höhe anzeigt, neben einander liegen können.)

L. Gesetzt aber, die Linie A C wäre 3 Schuh lang, dieses Rechteck also 3 Schuh hoch oder breit,

würden wir es alsdann auch nur in zwey solche Reihen von Quadratschuhen abtheilen können? K. Nein.

L. Wie viel solcher Reihen könnte man dann darin machen? K. Drey.

L. Und wie viel einzelne Quadratschuhe enthielten diese 3 Reihen? K. Zwölf.

L. Gut! Nun will ich hier auf den Stubenboden ein Rechteck verzeichnen, welches 5 Schuh lang, 4 Schuh breit oder hoch ist, und seine Länge A B, seine Breite (Höhe) aber A C nennen. — So! Jetzt sagt mir, wie viel Quadratschuhe in diesem Rechtecke der Länge nach, also von A nach B neben einander liegen können. K. Fünf.

L. Richtig! Ich will den Flächenraum, den diese fünf neben einander auf die Grundlinie A B gestellten Quadratschuhe einnehmen würden, durch eine Linie abschneiden (c d Fig. 2. T. I. ziehend) — So! Wer sagt mir nun geschwind, wie oft ich noch eine solche Reihe von 5 Quadratschuhen in den übrigen Raum dises Rechtecks legen könnte? K. Noch drey Mahl.

L. Und wie viel solcher Reihen können überhaupt in dem ganzen Rechtecke Platz finden? K. Vier.

L. Warum gerade vier, und weder mehr noch weniger? K. Weil es gerade 4 Schuh hoch oder breit ist.

L. Wie viel einzelne Quadratschuhe muß denn so nach dieses ganze Rechteck enthalten? K. Zwanzig.

L. Das

L. Das ist richtig, und ihr habt mir nun den Flächeninhalt dieses Rechtecks angeben können, ohne daß ihr nöthig hattet, es mit Hülfe eines Quadratschuhes auszumessen. Bloß zwey Zahlen durftet ihr mit einander multipliciren, um ihn zu finden. Könnt ihr mir sagen, was das für Zahlen waren? K. 4 und 5.

L. Eine von diesen zwey Zahlen zeigte die Länge der Grundlinie in Schuhen an: welche? K. Die Zahl 5.

L. Und welche von ihnen zeigte die Höhe dieses Rechtecks, aber ebenfalls in Schuhen, an? K. Die Zahl 4.

L. Nun sagt mir, was euch von diesem Rechtecke bekannt seyn mußte, damit ihr seinen Flächeninhalt durch eine kleine Rechnung finden konntet. K. Die Länge seiner Grundlinie und seiner Höhe. (Seine Grundlinie und seine Höhe.)

L. Gesetzt, wir hätten ein Rechteck, dessen Grundlinie 9, und dessen Höhe 5 Schuh betrüge, wie viel Quadratschuhe müßte wohl dieses Rechteck, eurer Meinung nach, enthalten? K. 45.

L. Richtig! Aber wie habt ihr diese Zahl gefunden? K. Wir haben die Zahlen 5 und 9 mit einander multiplicirt.

L. Nunmehr könnt ihr mir vielleicht sagen, was wir an einem Rechtecke nur messen dürfen, wenn wir den Inhalt seines Flächenraumes (seine Größe) finden wollen. K. Seine Grundlinie und seine Höhe.

L. Und was haben wir zu thun, wenn diese Messung vollendet ist? K. Dann müssen wir die Zahlen, welche uns sagen, wie groß jede dieser Ausdehnungen (Linien) ist, mit einander multipliciren.

L. Gut! Der Kürze wegen drückt man sich auch also aus: **man muß die Grundlinie mit der Höhe multipliciren.** Es muß aber, was ihr wohl merken müßt, die Höhe und Grundlinie **alle Mahl in einerley Maß**, d. h. entweder in Meilen, oder Ruthen, oder Schuhen, oder Zollen rc. ausgedrückt seyn. — Hier habe ich jetzt ein Rechteck verzeichnet (cdDC Fig. 2. T. I.), dessen Flächeninhalt ihr mir suchen sollt. Diese Länge (Fig. 3. T. I.), die einen Schuh bedeuten soll, soll dabey euer Maßstab seyn*). K. (messen nun die Grundlinie A B, sodann die Höhe A C, und multipiciren 5 und 3 mit einander und sprechen:) dieses Rechteck enthält 15 Quadratschuh.

L. Das ist richtig, und ihr habt jetzt eine Aufgabe aufgelößt. Wie lautet wohl diese? K. **Den Flächeninhalt eines Rechtecks zu finden.**

L. Und wie findet man diesen? K. **Wenn man seine Grundlinie mit seiner Höhe multiplicirt.**

L. Aber

*) Es versteht sich von selbst, daß dieser Maßstab an der schwarzen Tafel größer, als auf dem Papier hier genommen wird.

L. Aber wie wollt ihr beweisen, daß dieses Verfahren richtig ist und dieses Rechteck (Fig. 2.) wirklich 15 Quadratschuh enthält? K. —

L. Wie? wenn ihr diese Figur gerade in 15 gleiche Quadrate, deren Seite äqual wäre, dieser Linie hier (Fig. 3.), die einen Schuh, wie ihr wißt, bedeuten soll, eintheilen könntet, könnte man alsdann die Richtigkeit eures vorhin angewandten Verfahrens noch in Zweifel ziehen? K. Nein.

L. Auf welche Art könntet ihr also beweisen, daß dieses Rechteck wirklich, wie ihr behauptet, 15 Quadratschuhe enthalten müsse? K. Wenn wir es in 15 gleiche Quadrate, deren Seite äqual ab (Fig. 3.) wäre, eintheilen könnten.

L. Stellt doch einmahl einen Versuch an und seht, ob ihr diese Eintheilung nicht zu Stande bringen könnt. K. (stellen den Versuch an. Kommen sie, was gewöhnlich der Fall ist, nicht darauf, die punctirten Linien Fig. 2. zu ziehen; so fahre man etwa folgender Massen fort:)

L. Theilt einmahl die Grundlinie cd in Schuhe ab. — Nun zieht aus den Theilungspunkten Linien, welche mit einer der Seitenlinien cC oder dD parallel laufen und sich an der der Grundlinie gegen überstehenden Seite endigen. K. (thun dieß.)

L. Wer kann mir nun wohl bestimmt sagen, was ihr jetzt gethan habt? K. Wir haben die Grundlinie in Schuhe abgetheilt, und darauf aus den Theilungspuncten ꝛc.

L. Jetzt theilt eine der Seitenlinien ebenfalls in Schuhe ab, und zieht aus den Theilungspuncten Linien, welche mit der Grundlinie parallel laufen und sich an der gegen überstehenden Seitenlinie endigen. K. (thun dieß.)

L. Nun habt ihr dieses Rechteck wirklich in 15 gleiche Quadrate, deren Seite äqual a b ist, getheilt. Beschreibt mir einmahl das ganze Verfahren, wodurch ihr dieses bewerkstelligt habt? K. Erstlich haben wir ꝛc.

L. Daß aber diese 15 kleinen Vierecke wirklich lauter gleiche Quadrate sind, deren Seite so lang als die Linie a b ist, erhellet aus folgendem Beweise: c e ist gleich f g, weil Parallellinien, die von Parallelen begrenzt werden, einander gleich seyn müssen. Aus dem nämlichen Grunde ist auch c f = e g Nun ist aber c e unserer Annahme nach einen Schuh lang, also muß f g auch so lang seyn, und da c f auch einen Schuh lang ist, so muß auch e g diese Länge haben. Folglich ist jede der vier Seiten der Figur c e g f einen Schuh lang. Der Winkel c ist ein rechter Winkel, weil die ganze Figur C D d c ein Rechteck ist. Ist aber in einem Parallelogramme Ein Winkel ein rechter, so müssen die andern auch rechte seyn. Die Figur c e g f hat also 4 gleiche Seiten und 4 rechte Winkel, ist folglich ein Quadrat. Daß jede der vier Seiten der Figur e g h i auch äqual der Linie a b (Fig. 3.) seyn müsse, läßt sich eben so, wie bey der vorhergehenden Figur beweisen. Daß x ein rechter Winkel ist, folgt daraus, weil er der Nebenwinkel eines

nes rechten ist. Ist aber x ein rechter Winkel, so müssen die übrigen Winkel des Vierecks e g h i gleichfalls rechte, und diese Figur muß auch ein Quadrat seyn. Auf eine ähnliche Weise läßt sich von allen diesen Vierecken (Fig. 2.) beweisen, daß sie Quadrate sind, deren Seite der Linie a b gleich ist. — Da ihr nunmehr auch die Richtigkeit des Verfahrens beweisen könnt, welches man bey Auflösung der Aufgabe: den Flächeninhalt eines Rechtecks zu finden, anwenden muß; so wollen wir uns in Ausrechnung verschiedener Rechtecke üben.

Man lasse nun 1) den Flächeninhalt des Stubenbodens, der Wände und der Thüre des Lehrzimmers, so wie der daselbst vorhandenen viereckigten Tische finden; 2) stecke man auch größere Rechtecke im Freyen ab, lasse ihre Höhe und Grundlinie messen, und aus den gefundenen Zahlen ihren Flächeninhalt suchen, wobey man Gelegenheit finden wird, den Kindern zu sagen, daß, wenn etwa eine Seite der auszurechnenden Fläche in verschiedenen Maßtheilen, z. B. in Schuhen und Zollen gefunden würde, nicht nur diese, sondern auch die andere Seite (die Höhe oder die Grundlinie) in Zollen angegeben und die, nach geschehener Multiplication, gefundenen Quadratzolle in Quadratschuhe, und diese wieder, wo es angeht, in Quadratruthen verwandelt werden müssen. Hielte z. B. die Grundlinie eines Rechtecks 3 Schuh und 6 Zoll, und die Höhe 2 Schuh, so würden die Schuhe in Zolle verwandelt und die Zahlen 20 (die in Zollen ausgedrückte Höhe) und 36 (die gleichfalls in Zollen ausgedrückte Länge der Grundlinie) mit einander multiplicirt. Das Product 720 zeigt alsdann Quadratzolle an, welche mit 100 zu

Quadratschuhen gemacht werden. Und wäre irgend ein Rechteck 2 Schuh lang und 9 Zoll 8 Linien hoch, so müßte alles in Linien ausgedrückt werden, ehe man die Multiplication der einen Seite mit der andern anstellen könnte, und die Berechnung wäre folgende:

98''' Höhe
200''' Grundlinie

Flächeninh. 19600 Quadratl. = 1□' 96□''*)

Neun und funfzigster Satz.

Zusatz.

L. Hier (Fig. 4. T I.) habe ich ein Quadrat, dessen grundlinie 3 Schuh lang ist. Könnt ihr mir nun wohl sagen, wie hoch es seyn muß? K. Auch 3 Schuh.

L. Da ein Quadrat nichts anders als ein Rechteck, nur von lauter gleichen Seiten, ist; so wird sein Flächeninhalt wie der eines jeden andern Rechtecks, d. h. durch Multiplication seiner Höhe mit seiner Grundlinie, gefunden. Ihr werdet mir daher gleich sagen können, welche Zahlen ihr jetzt mit

*) Es ist nützlich, wenn man bey dergleichen Uebungen nebst dem Decimalmaß auch das Duodecimalmaß zum Grunde legt, auch wohl den im Decimalmaß angegebenen Inhalt einer Fläche im Duodecimalmaß und umgekehrt auf die S. 126 des 1sten B. angegebene Art finden läßt.

mit einander multipliciren müßt, um die Anzahl der Quadratschuhe zu finden, die in diesem Quadrate enthalten sind. K. Da müssen wir 3 mit 3 multipliciren.

L. Warum gerade 3 mit 3? K. Weil so wohl die Grundlinie als die Höhe dieses Quadrates 3 Schuh beträgt.

L. Wenn in einem Multiplicationsexempel die beyden Factoren von einerley Größe sind; so spricht man: es wird eine Zahl mit sich oder in sich selbst multiplicirt. Wenn ich z. B. sage: 3 Mahl 3 ist 9; 4 Mahl 4 ist 16: so habe ich im erstern Falle die Zahl 3, im letztern die Zahl 4 mit sich selbst multiplicirt. Welche Zahl muß nun mit sich selbst multiplicirt werden, wenn wir die Anzahl der in diesem Quadrate (Fig. 4.) enthaltenen Quadratschuhe finden wollen? K. die Zahl 3.

L. Und welche Zahl erhalten wir dadurch zum Producte? K. Die Zahl 9.

L. Und was zeigt uns hier in unserm Falle die Zahl 9 an? K. Die Menge der Quadratschuhe, die dieses Quadrat enthält.

L. Nun sagt mir doch einmahl, was wir zu thun haben, wenn wir den Flächeninhalt irgend eines Quadrates finden wollen. K. Da müssen wir eine seiner Seiten messen, und die Zahl, die uns sagt, wie oft eine Ruthe, oder ein Schuh ꝛc. in ihr enthalten ist, mit sich selbst multipliciren.

L. Nun

L. Nun sucht mir doch den Flächeninhalt dieser Quadrate (mehrere dergleichen Figuren, von deren Seiten a b Fig. 3. immer ein aliquoter Theil ist, verzeichnend). K. (stellen die nöthigen Messungen an, wobey Fig. 3. immer als ein Schuh angenommen wird.)

L. Hier (Fig. 5. Tab. I.) habe ich ein Quadrat verzeichnet, dessen Seite 5 unserer angenommenen Schuhe (Fig. 3.) enthält. Sagt mir nun, wie viel unserer Quadratschuhe es in sich fassen muß. K. 25.

L. Wie könntet ihr mich hievon wohl am besten überzeugen, wenn ich daran zweifeln wollte? K. Wenn wir das ganze Quadrat in lauter Quadratschuhe, von der Größe, wie wir sie angenommen haben, abtheilten.

L. Macht einmahl diese Eintheilung. K. (ziehen die punctirten Linien (Fig. 5.).

L. Da haben wir wirklich 25 unserer angenommenen Quadratschuhe. Wie viel davon stehen denn auf der Linie A B? K. 5.

L. Warum können nur gerade ihrer 5 darauf stehen? K. Weil diese Seite (Linie) gerade 5 Schuh lang ist.

L. Wie viel solcher Reihen stehen aber über oder hinter einander von A nach C? K. Fünf.

L. Woher kommt es, daß gerade nur fünf solcher Reihen über einander stehen können? K. Weil die Seite A C gerade auch 5 Schuh lang (das Quadrat gerade 5 Schuh breit) ist.

L. Frey-

L. Freylich! Jetzt werdet ihr mir wohl sagen können, warum eine Quadratruthe, nach dem Decimalmaße, gerade 100 Quadratschuh enthalten muß. Wer sagt mir, warum? K. Weil die Seite einer Quadratruthe 10 Schuh lang ist, und also gerade 10 Reihen, jede von 10 Quadratschuhen darin Platz haben.

L. Aus dem nämlichen Grunde hat ein Quadratschuh (im Decimalmaße) 100 Quadratzoll, und Ein solcher 100 Quadratlinien ꝛc. Und weil eine sogenannte Rheinländische Ruthe 12 Schuh hält, so muß auch eine dergleichen Quadratruthe 12 Mahl 12 d. h. 144 Quadratschuh, ein solcher aber 144 Quadratzoll u. s. w. in sich fassen. — Bey dieser Gelegenheit merkt, daß man in der Rechenkunst jedes Product, welches entsteht, wenn man eine Zahl mit sich selbst multiplicirt, die Quadratzahl dieser (mit sich selbst multiplicirten) Zahl nennt. So ist z. B. 9 die Quadratzahl von 3, 16 die Quadratzahl von 4; 25 die Quadratzahl von 5 u. s. w. Der Grund dieser Benennung ist kein anderer, als weil ein solches Product alle Mahl den Inhalt eines Quadrates angiebt, dessen Seite so viel Linien, Zolle, Schuhe ꝛc. mißt, als die mit sich selbst multiplicirte Zahl Einheiten enthält.

Sechzigster Satz.

Aufgabe.

L. Meynt ihr wohl, daß ein rechter und ein spitziger Winkel einander decken können? K. Nein.

L. War-

L. Warum nicht? K. Weil ein spitziger Winkel kleiner als ein rechter ist.

L. Aber ein stumpfer und ein rechter Winkel können einander decken? K. Auch nicht.

L. Warum denn nicht? K. Weil ein stumpfer Winkel größer als ein rechter ist.

L. Da ihr dieses wißt, so werdet ihr mir wohl sagen können, ob man dieses schiefwinklichte Parallelogramm (ABCD Fig. 6. T. I. ohne die punctirten Linien verzeichnend) durch ein Quadrat, es sey dieses nun eine Quadratlinie, oder ein Quadratzoll ꝛc. auf die nämliche Art ausmessen kann, auf welche wir gestern (letzthin) ein Rechteck mit Hülfe unsers Quadratschuhes ausgemessen haben. K. Das kann man nicht.

L. Warum wohl nicht? K. Weil die rechten Winkel des Quadrates nicht auf (in) die spitzigen und stumpfen Winkel des schiefwinklichten Parallelogramms passen.

L. Richtig! Wenn wir z. B. auf die Grundlinie dieses Parallelogramms (Fig. 6.) so viel Quadrate neben einander stellen wollten, als möglich ist, so würde das erste bey A zum Theil über diese Figur heraus fallen, und das letzte bey B das Stück x unbedeckt lassen. Derselbe Fall würde Statt finden, wenn man die zweite Reihe von Quadraten über die erste stellte, wie diese Zeichnung ausweist. Ein schiefwinklichtes Parallelogramm kann also, als solches, nicht in lauter Quadrate zerfällt, mit einem Quadrate also nicht unmittelbar ausgemessen werden. Da den Menschen gleichwohl daran gelegen-

gen war, auch den Flächeninhalt von Rhomben und Rhomboiden erforschen zu können, so war man auf Mittel zur Erreichung dieses Zwecks bedacht und hat sie auch leicht gefunden. Auch ihr werdet sie finden, wenn ihr mit mir ein bischen über die Sache nachdenken wollt. Hier (Fig. 7 Tab. I.) sind 2 Parallelogramme, ein recht- und ein schiefwinklichtes. Welches von beyden mag wohl das größere seyn? K. Davon ist das eine so groß als das andere, weil beyde einerley Höhe und Grundlinie haben.

L. Welches von beyden läßt sich denn wohl in lauter gleiche Quadrate zerfällen, also mit einem Quadrate ausmessen? K. Das rechtwinklichte.

L. Wenn wir nun fänden, daß das rechtwinklichte 6 Quadratschuhe enthielte, wäre uns dann die Größe des schiefwinklichten noch unbekannt? K. Nein.

L. Wie viel Quadratschuhe müßte denn dieses enthalten? K. Auch 6.

L. Warum behauptet ihr dieses? K. Weil das schiefwinklichte mit dem rechtwinklichten einerley Größe hat.

L. Richtig! Hier ist abermahls ein schiefwinklichtes Parallelogramm (ABCE Fig. 7. besonders verzeichnend). Könnt ihr mir nun wohl sagen, was ihr nur thun dürftet, wenn ihr seinen Flächeninhalt erforschen wolltet? K. Da dürften wir es nur in ein rechtwinklichtes verwandeln und dann verfahren, wie wir vorhin (gestern) verfahren sind.

L. Gut

L. Gut! Was würde denn wohl das rechtwinklichte Parallelogramm, das man aus diesem da (Fig. 7.) machen kann, mit ihm (diesem letztern) gemein haben? K. Die Höhe und die Grundlinie.

L. Könnt ihr denn nicht jetzt schon, ohne diese Verwandlung wirklich vorzunehmen, sagen, wie viel Linien, oder Zolle, oder Schuhe sowohl die Höhe als die Grundlinie des rechtwinklichten Parallelogramms, das man aus diesem (A B C E Fig. 7.) machen kann, halten muß? K. Allerdings.

L. Wie wollt ihr denn dieses erfahren? K. Wir dürfen nur von der verlängerten Grundlinie dieses Parallelogramms (Fig. 7.) eine senkrechte Linie bis zur gegenüberstehenden Seite ziehen und so wohl diese als die Grundlinie messen.

L. Thut dieses einmahl. K. (ziehen die C D und messen sowohl diese, als die A B mit einerley Maß und finden, daß jene 3, diese 2 Schuh hält.)

L. Könnt ihr mir denn jetzt nicht sagen, wie viel der Flächeninhalt des rechtwinklichten Parallelogramms, worein dieses da (A B C E Fig. 7.) verwandelt werden kann, betragen muß? K. O ja! er muß 6 Quadratschuh betragen.

L. Aber wie viel Quadratschuh muß dieses schiefwinklichte Parallelogramm (Fig. 7.) halten? K. Auch 6.

L. Warum glaubt ihr dieses? K. Weil es eben so groß ist, als das rechtwinklichte, das man aus ihm machen kann.

L. Rich-

L. Richtig! Ihr habt jetzt den Flächeninhalt dieses Parallelogramms (ABCE Fig. 7.) gefunden, ohne daß ihr es in ein Rechteck verwandeln, oder mit einem Quadrate messen durftet. Nun habe ich hier (Fig. 8. Tab. I.) abermahls ein schiefwinklichtes Parallelogramm verzeichnet. Wer sagt mir wohl geschwind, wie man auf die kürzeste Art seinen Flächeninhalt finden kann? K. Man findet ihn, wenn man von seiner Grundlinie eine senkrechte Linie bis an die gegenüberstehende Seite zieht, diese senkrechte so wohl, als die Grundlinie mit einerley Maßtheilen mißt, und beyde auf diese Art gefundene Zahlen mit einander multiplicirt.

L. Das heißt kürzer: wenn man seine Höhe mit seiner Grundlinie multiplicirt. Ihr habt nun abermahls eine Aufgabe auflösen gelernt. Wie lautet diese Aufgabe? K. Den Flächeninhalt eines schiefwinklichten Parallelogramms zu finden.

L. Und mit welchen Worten wollt ihr einem Andern ganz kurz anzeigen, wie er diese Aufgabe auflösen muß? K. Mit diesen: multiplicire die Höhe und die Grundlinie mit einander.

L. Aber auf diese Weise findet man ja nur den Flächeninhalt eines Rechtecks? K. Ein schiefwinklichtes Parallelogramm ist aber eben so groß, als ein Rechteck, das mit ihm gleiche Höhe und Grundlinie hat. Wer daher den Inhalt des letztern gefunden hat, dem ist auch zugleich der Inhalt des erstern bekannt geworden.

L. Richtig! Nun will ich euch auch zeigen, daß die Erfahrung das, was ihr jetzt gelernt habt, wirklich bestätigt.

Man bilde hier mit Nro. 13. die neunte Figur der ersten Tafel, nenne die Länge CE (Fig. 9.) = EH = HA einen Schuh, folglich die Länge GD 5 Zoll im Decimalmaße und spreche etwa:

L. Hier haben wir ein schiefwinklichtes Parallelogramm, dessen Grundlinie CD ist, und dessen Höhe durch die Linie EA angezeigt wird. Da wir die Länge CE, welche so groß als EH oder HA ist, einen Schuh nennen, so ist die Grundlinie 2 Schuh und 5 Zoll, oder 25 Zoll; die Linie EA aber zwey Schuh, oder 20 Zoll lang. Jetzt sagt mir geschwind, wie viel der Flächeninhalt dieses schiefen Parallelogramms betragen muß. K. 500 Quadratzoll.

L. Wie viel sind dieses Quadratschuhe? K. Fünf.

L. Jetzt will ich aus diesem Rhomboides ein Rechteck machen (das Dreyeck ACE (Fig 9) herüber an die rechte Seite legend, so daß es die Lage von BDF erhält und dadurch das Parall. ABEF entsteht). — So! Sagt mir jetzt, wie lang die Grundlinie dieses Rechtecks ist. K. Auch 25 Zoll.

L. Und wie viel Zoll beträgt seine Höhe? K. 20 Zoll.

L. Da hat also dieses Rechteck mit dem vorigen schiefen Parallelogramme gleiche Grundlinie

und

und Höhe. Was folgt daraus? K. Daß es auch mit ihm gleiche Größe haben müsse.

L. Freylich! Dieses kann auch gar nicht anders seyn. Denn ich habe ja von der ganzen Fläche (dem Rhomboides) nichts weggenommen, sondern nur einige ihrer Theile an eine andere Stelle gelegt und dadurch dem Ganzen eine andere Figur gegeben. Dieses Rechteck muß also eben so gut 5 Quadratschuh enthalten, wie der Rhomboides, woraus es entstanden ist. Und daß dem so sey, sollt ihr gleich sehen.

Nun lege man die 5 Trapezien einzeln hin, und füge an jedes derselben eines der 5 Dreyecke so, daß ein Quadrat daraus entsteht, und also die Kinder die 5 Quadrate, wovon jedes einen Quadratschuh bedeuten soll, einzeln vor sich liegen sehen. — —

L. Da wir nun unser voriges schiefes Parallelogramm wirklich in 5 Quadratschuhe zerlegt haben; so seht ihr daß unser Verfahren, durch welches wir gleich Anfangs fanden, daß es die erst angegebene Anzahl von Quadratschuhen enthalten müsse, richtig seyn mußte. Jetzt seht auch noch diese Figuren (von Fig. 2. der VII. Tafel der ersten Hälfte die Parallelogramme DFIL und BbCcDdEe vorlegend) an. Die Höhe des Par. DFIL wird durch das auf die verlängerte Grundlinie gefällte Loth LM angezeigt. Wenn wir nun die Länge DH einen Schuh nennen; so mißt die Grundlinie dieses Parallelogramms 2, und

 seine

seine Höhe 4 Schuh. Wieviel Quadratschuhe muß demnach dieses schiefwinklichte Parallelogramm enthalten? K. 8.

L. Und so viel hat es deren wirklich. Denn es enthält, wie ihr seht, 4 ganze und 8 halbe gleiche Quadrate, deren Seite wir einen Schuh genannt haben. Jetzt sucht den Flächeninhalt dieses Parallelogramms (BbCcDdEe Fig. 2. Tab. VII.) und seht, ob wirklich so viel Quadrate darin enthalten sind, als euer gefundenes Product anzeigt. K. (finden hier ebenfalls das Produkt 8 und eben so viel gleiche Quadrate im erwähnten Parallelogramme.)

L. Jetzt will ich einmahl sehen, wer mir am ersten den Flächeninhalt eines Parallelogramms wird finden können, dessen Grundlinie 8 Schuh und 3 Zoll, dessen Höhe aber 3 Schuh und 9 Zoll beträgt. K. (rechnen folgendes Exempel:

83″ Grundlinie
39″ Höhe
747
249
3237 □″ = 32 □′, 37 □″)

L. Wie groß muß denn aber wohl ein Parallelogramm seyn, dessen Grundlinie 5 Ruthen und 7 Schuh, dessen Höhe aber 9 Schuh und 8 Zoll im Decimalmaße hält? K. (rechnen:

570″

570″ Grundline
98″ Höhe

4560
5130

55860 □″ = 5 □°, 58 □′, 60 □″)

Dergleichen Fälle werden mehrere, und zwar bald im Decimal- bald im Duodecimalmaße, berechnet.

Ein und Sechzigster Satz.

Zusatz.

L. Da ihr nunmehr den Flächeninhalt eines jeden Parallelogramms finden könnt; so werdet ihr mir bey einigem Nachdenken über die Sache wohl auch sagen können, wie man das Verhältniß, in welchem jede zwey Figuren des erst erwähnten Namens zu einander stehen, erforscht. Wer sagt mir dieß? K. —

L. Könnt ihr mir wohl gleich sagen, wie sich diese zwey Parallelogramme (Fig. 1 und 6. T. I. ohne die punctirten Linien verzeichnend) zu einander verhalten? K. Nein.

L. Würdet ihr mir denn dieses auch nicht sagen können, wenn euch die Zahl der Quadratschuhe bekannt wäre, die jedes davon enthält? K. O ja.

L. Nun da wißt ihr ja wohl, was ihr vor allen Dingen zu thun habt, wenn ihr erfahren

wollt, wie sich diese 2 Parallelogramme zu einander verhalten. Was müßt ihr deshalb thun? K. Wir müssen den Flächeninhalt eines jeden derselben suchen.

L. Und wie könnt ihr diesen finden? K. Wenn wir eines jeden Grundlinie mit seiner Höhe multipliciren.

L. Thut dieses. K. (messen und rechnen.)

L. Wie viel unserer Quadratschuhe hält denn dieses Parallelogramm da (auf Fig. 1. zeigend)? K. 8.

L. Und dieses da (Fig. 6.)? K. Hält deren 9.

L. Wie verhält sich denn 8 zu 9? K. 8 ist 8 Mahl der 9te Theil von 9.

L. Wie muß sich demnach dieses Parallelogramm da (Fig 1.) zu diesem hier (Fig. 6.) verhalten? K. Das erstere muß 8 Mahl der 9te Theil von dem letztern seyn.

L. Da können wir also sprechen: das Parallelogramm Fig. 1. verhält sich zu dem Parallelogramm Fig. 6. wie das Product aus der Höhe und Grundlinie von Fig. 1. zu dem Producte aus der Höhe und Grundlinie von Fig. 6. *); oder: beyde Parallelogramme verhalten sich zu einander, wie die Producte aus ihren Höhen in ihre Grundlinien. Und da, wie ihr gesehen habt, der Flächen-

*) Ohne mein Erinnern wird man an der Tafel die eine dieser Figuren mit abcd, die andere mit ABCD bezeichnen.

cheninhalt eines jeden Parallelogramms durch das Product aus seiner Höhe und Grundlinie angezeigt wird; so können wir überhaupt sagen: ein Paar Parallelogramme verhalten sich zu einander, wie die Producte aus ihren Höhen in ihre Grundlinien. Da sich aber diese Producte wiederum zu einander verhalten wie die Grundlinien, wenn die Höhen gleich sind, und wie die Höhen, wenn die Grundlinien einerley Länge haben, so können wir noch folgende zwey Sätze aufstellen:

1) Parallelogramme, die gleiche Höhen haben, verhalten sich zu einander, wie ihre Grundlinien.

2) Parallelogramme, die gleiche Grundlinien haben, verhalten sich zu einander, wie ihre Höhen.

Demnach haben wir nur in dem Falle die Producte aus den Grundlinien und Höhen zweyer Parallelogramme, deren Verhältniß zu einander erforscht werden soll, zu suchen, wenn diese Figuren verschiedene Höhen und Grundlinien haben. Ob ihr diese Sätze verstanden habt und Anwendung davon machen könnt, will ich nun sehen. Hier sind zwey Parallelogramme ac und AC*) die sowohl verschiedene Höhen als verschiedene Grundlinien haben. Was müßt ihr nun thun, wenn

*) Hier bilde ich mit Nro. 18. meines Versinnlichungsapparats die 10te Figur der ersten Tafel, und nenne die Länge ae Einen, folglich ab zwey Zoll.

ihr mir ihr Verhältniß zu einander angeben und sagen wollt, wie oft das kleinere in dem größern enthalten ist? K. Da müssen wir eines jeden Höhe mit seiner Grundlinie multipliciren (eines jeden Flächeninhalt suchen).

L. Thut dieses und nehmt da diese Länge (a e Fig. 10.) als einen Zoll an. K. (messen und rechnen).

L. Wie viel Quadratzolle hat also das Parallelogramm a c? K. 6.

L. Und das Parallelogramm A C? K. 12.

L. Wie verhält sich denn das Product 6 zu dem Producte 12? K. Jenes ist halb so groß als dieses.

L. Wie muß sich so nach das Parallelogramm a c zu dem Parallelogramm A C verhalten? K. Das erstere muß halb so groß als das letztere seyn.

L. Und so ist es auch wirklich. Denn ich kann, wie ihr hier seht, aus dem Parallelogramm A C zwey kleinere machen, wovon jedes so groß als a c ist (A C in zwey a c zerlegend). Hier (neben ABCD Fig. 10. noch efgh Fig. 11. legend) bilde ich abermahls 2 Parallelogramme, die aber nur verschiedene Grundlinien, dagegen gleiche Höhen haben. Ist es hier wohl auch nöthig, die Producte aus ihren Höhen in ihre Grundlinien zu suchen, wenn wir ihr Verhältniß zu einander erforschen wollen? K. Nein.

L. In

L. In welchem Falle ist dieses nur nöthig? K. Wenn die Parallelogramme verschiedene Höhen und Grundlinien haben.

L. Was dürfen wir denn in unserm jetzt vorliegenden Falle nur ausfindig zu machen suchen? K. Wie sich die Grundlinien dieser Parallelogramme zu einander verhalten.

L. Macht nun dieses ausfindig. K. (messen.)

L. Nun! wie verhalten sich beyde Grundlinien zu einander? K. h g ist 3 Mahl in A B enthalten.

L. Wie oft muß demnach dieses Parallelogramm (h g f e) in diesem da (A C zeigend) enthalten seyn? K. Drey Mahl.

L. Richtig! Ihr würdet mir dieses aber nicht sagen können, wenn euch nicht ein gewisser Satz bekannt wäre. Wie lautet dieser? K. Parallelogramme, die gleiche Höhen haben &c.

L. Daß sich unsere 2 Parallelogramme wirklich wie ihre Grundlinien zu einander verhalten, könnt ihr daraus sehen, weil ich A C in 3 h f zerlegen kann (diese Theilung vornehmend). — — Hier lege ich noch Ein Mahl 2 Parallelogramme her (neben A B C D Fig. 10. noch I K L M Fig. 12. legend) und gebe euch den Auftrag, zu erforschen, in welchem Verhältnisse sie zu einander stehen. Da sie gleiche Grundlinien, aber verschiedene Höhen haben, so könnt ihr mir sagen, ob es nöthig ist oder nicht, ihren Flächeninhalt (die Producte

ducte aus ihren Höhen in ihre Grundlinien) zu suchen. K. Das ist nicht nöthig.

L. Was dürft ihr denn nur thun? K. Sehen, wie sich ihre Höhen zu einander verhalten.

L. Nun so sucht das Verhältniß in welchem diese Linien zu einander stehen. a b steht senkrecht auf M L, zeigt also die Höhe des Parallelogramms MK an. K. (messen.)

L. Nun wie verhalten sich die Höhen dieser 2 Parallelogramme zu einander? K. a b (Fig. 12.) ist 2 Mahl in B C (Fig. 10.) enthalten.

L. Und was folgt hieraus? K. Daß das Parallellogramm M K auch 2 Mahl in dem Parallelogramm A C enthalten seyn müsse.

L. Nach welchem Satze könnt ihr dieses behaupten? K. Nach diesem: Parallelogramme die gleiche Grundlinien haben, verhalten sich ꝛc.

L. Seht doch, ob dieses zutrifft, und ob ihr wirklich aus diesem Parallelogramme (A B C D Fig. 10.) zwey solche (auf I K L M Fig. 12. zeigend) bilden könnt. K. (bilden mit Beyhülfe des Lehrers aus A B C D zwey I K L M) —

L. Nun wollen wir unsere Aufmerksamkeit auch noch einen Augenblick auf die Quadrate richten und sehen, wie sich immer je zwey und zwey dieser Figuren zu einander verhalten müssen. Vor allem sagt mir, ob wohl zwey Quadrate verschiedene Grundlinien dabey aber gleiche Höhen haben können. K. Das ist nicht möglich.

L. War-

L. Warum haltet ihr dieses für unmöglich? K. Weil bey einem Quadrate alle Mahl die 4 Seiten einander gleich seyn müssen. Haben daher ein Paar Quadrate verschiedene Grundlinien, so müssen sie offenbar auch verschiedene Höhen haben.

L. Aus dem nämlichen Grunde können auch ein Paar Quadrate nicht verschiedene Höhen und gleiche Grundlinien haben. Wenn uns also ein Paar Quadrate vorkommen, deren Seiten von einander verschieden sind; so haben wir sie alle Mahl als Parallelogramme von ungleichen Grundlinien und Höhen zu betrachten. Und wie verhalten sich solche Parallelogramme zu einander? K. Wie die Producte aus ihren Höhen in ihre Grundlinien.

L. Wie müssen sich demnach je zwey und zwey Quadrate zu einander verhalten? K. Ebenfalls wie die Producte aus ihren Höhen in ihre Grundlinien.

L. Richtig! Da aber diese Producte alle Mahl Quadratzahlen sind; so spricht man auch: Quadrate verhalten sich zu einander, wie die Quadratzahlen ihrer Seiten. Diesen Satz will ich jetzt durch einige Beispiele bestätigen. Hier habe ich ein Quadrat A dessen Seite ich einen Schuh nennen will, und hier ein Quadrat B, dessen Seite noch ein Mahl so lang als die Seite von A ist *). Darf ich nun so urthei-

*) Ich lege hier Fig. 13. u. 14. Tab. I. beyde mit Nro. 13. meines Versinnlichungsapparates gebildet, vor.

theilen: weil die Seite von B noch Ein Mahl so groß als die Seite von A ist, so ist auch das Quadrat B noch Ein Mahl so groß, als das Quadrat A? K. Nein.

L. Was für Zahlen müssen wir denn wohl jetzt suchen, wenn wir erfahren wollen, wie sich diese 2 Figuren zu einander verhalten? K. Die Quadratzahlen ihrer Seiten.

L. Also die Quadratzahlen von 1. u. 2. Die Quadratzahl von 1 ist aber —? K. Eins.

L. Und die Quadratzahl von 2 ist —? K. Vier.

L. Wie oft ist denn 1 in 4 enthalten? K. Vier Mahl.

L. Wie oft muß so nach das Quadrat A in dem Quadrate B enthalten seyn? K. Auch vier Mahl.

L. Und so ist es auch wirklich. Denn ich kann, wie ihr seht, aus dem Quadrate B gerade 4 solche (auf A zeigend) machen (B in 4 A zerlegend). — Jetzt lege ich hier neben A (Fig. 13.) das Quadrat C (Fig. 15.) her *), und gebe euch den Auftrag, zu untersuchen, wie sich die Seite von A zur Seite von C verhält. K. Die Seite von A ist in der Seite von C drey Mahl enthalten.

L. Wie

*) Hier bilde ich mit 4 Trapezien und 4 Dreyecken von Nro. 13., ferner mit Nro. 14. und mit 4 Stücken von Nro. 18. die 15te Fig. der 1sten Tafel.

L. Wie oft wird nun das Quadrat A in dem Quadrate C enthalten seyn müssen? K. Neun Mahl.

L. Was habt ihr für einen Grund, dieses zu behaupten? K. Diesen: Quadrate verhalten sich zu einander wie die Quadratzahlen ihrer Seiten. Nun ist aber die Quadratzahl der Seite von C neun Mahl so groß, als die Quadratzahl der Seite von A, folglich muß auch das Quadrat C neun Mahl so groß, als das Quadrat A seyn

L. Gut! Und daß C wirklich 9 Mahl so groß als A sey, lehrt der Augenschein. Denn wir können es in 9 Stücke, jedes so groß als A, zerlegen (diese Theilung vornehmend).

Wer es für nützlich hält, die Kinder auf mancherley Art im richtigen und bestimmten GedankenAusdrucke zu üben, der kann hier Tab. II. vorlegen und folgende Sprechübungen, wobey zugleich die vorhergehenden Sätze eingeübt werden, anstellen.

L. Ihr erblickt auf dieser Kupfertafel eine Menge kleiner Quadrate, die alle von gleicher Größe sind und deren Seite wir einen Schuh nennen wollen. Durch Verbindung einer kleinern oder größern Anzahl dieser Quadrate bekommen wir Parallelogramme von verschiedener Größe, wovon wir jetzt immer 2 und 2 mit einander vergleichen wollen, um zu erforschen, wie sie sich zu einander verhalten. Wir wollen zuerst die Parallelogramme eh (efhd) und fn (fmnh) (Fig. 2.) ins Auge fassen. Wer sagt mir, welche Ausdehnung bey beyden von einerley Größe, und welche verschie-

schieden ist? K. Die Höhe ist bey beyden gleich, ihre Grundlinien (Breiten) sind aber verschieden.

L. Und wie verhalten sich die Grundlinien zu einander? K. Die Grundlinie hn ist zwey Mahl so groß als die Grundlinie dh.

L. Wie müssen sich demnach die Parallelogramme eh und fn zu einander verhalten? K. Das letztere muß 2 Mahl so groß als das erstere seyn.

L. Wer kann jetzt in einem zusammenhängenden Satze nicht nur sagen, wie sich diese 2 Parallelogramme zu einander verhalten, sondern auch die Gründe seiner Aussage (Behauptung) gleich beyfügen? K. Das Parallelogramm fn ist zwey Mahl so groß als das P. eh, weil beyde Parallelogramme gleiche Höhen haben, die Grundlinie des erstern aber zwey Mahl so groß als die Grundlinie des letztern ist, und Parallelogramme von gleicher Höhe sich alle Mahl wie ihre Grundlinien zu einander verhalten.

L. Wie viel Quadratschuhe muß denn so nach das Parallelogramm fn in sich fassen, da eh deren 2 enhält? K. 4.

L. Und daß dem so sey, lehrt euch der Augenschein. — Jetzt sage mir einer von euch, wie sich das Parallelogramm eh zu dem Parallelogramme fq (fpqh) verhält, und füge ebenfalls gleich die Gründe seiner Aussage bey. K. Das Parallelogramm eh ist gleich dem dritten Theile von dem Parallelogramme fq, weil beyde Figuren gleiche Höhen haben, die Grundlinie der erstern

aber

aber 3 Mahl in der Grundlinie der letztern enthalten ist, und Parallelogramme von gleichen Höhen sich wie ihre Grundlinien zu einander verhalten.

L. Wie viel Quadratschuhe muß also f q enthalten, da e f deren 2 enthält? K. 6.

L. So viel enthält es auch, wir ihr seht.

Auf diese Weise geben die Kinder der Reihe nach an, wie sich das Parallelogramm e h verhält, zu dem Parallelogramme f s, f u, u. s. w.

L. Jetzt faßt einmahl die Parallelogramme e i (e g i d) und g s (g r s i) ins Auge und gebt, ebenfalls mit Beyfügung der Gründe eurer Aussage, ihr Verhältniß zu einander an. K. Das Parallelogramm e i muß gleich seyn 2 Dritteln vom Parallelogramm g s, weil beyde Figuren gleiche Höhen haben, die Grundlinie des erstern aber gleich ist 2 Dritteln von der Grundlinie des letztern, und Parallelogramme von gleichen Höhen sich verhalten ꝛc. oder: das Parallelogramm e i ist in dem Parallelogramme g s Ein und ein halb Mahl enthalten, weil ꝛc.

L. Jetzt vergleicht einmahl das Parallelogramm e i mit dem Parallelogramme g w und gebt mir abermahls mit Hinzufügung der Gründe eurer Aussage das Verhältniß an, in dem beyde zu einander stehen. K. Das Parallelogramm e i ist gleich 2 Fünfteln von dem Parallelogramme g w, weil ꝛc. oder: das Parallelogramm e i ist $2\frac{1}{2}$ Mahl in g w enthalten, weil ꝛc.

Auf

Auf diese Art kann man nicht nur das Parallelogramm ei noch mit gy, gl und go, sondern noch viele andere mit einander z. B. Arnh mit Bzsi ꝛc. vergleichen lassen.

L. Jetzt faßt die Parallelogramme ad und eh ins Auge und sagt mir, wie sie sich zu einander verhalten. K. Das Parallelogramm ad ist halb so groß als das Parallelogramm eh.

L. Woher wißt ihr dieses? K. Daher, weil beyde Parallelogramme gleiche Grundlinien haben, eh aber noch Ein Mahl so hoch als ad ist, und Parallelogramme von gleichen Grundlinien sich zu einander wie ihre Höhen verhalten.

L. Nun soll mir Carl sagen, wie sich das Parallelogramm ad zu dem Parallelogramm Ai (ABih) verhält, und zugleich den Grund seiner Behauptung angeben. K. Das Parallelogramm ad ist gleich einem Drittel von Ai (ist in Ai drey Mahl enthalten), weil beyde Parallelogramme gleiche Grundlinien haben, Ai aber drey Mahl so hoch als ad ist, und Parallelogramme von gleichen Grundlinien sich wie ihre Höhen zu einander verhalten.

So kann man das Parallelogramm ad noch mit mehreren der folgenden, die mit ihm gleiche Grundlinien aber eine größere Höhe haben, vergleichen lassen.

L. Jetzt soll mir August geschwind sagen, wie sich das Parallelogramm eh zu dem Parallelogramm Ai verhält, und zugleich den Grund seiner Aussage beyfügen. K. Das Parallelogramm eh

muß

muß gleich seyn 2 Dritteln von dem Parallelogramm Ai, weil beyde Figuren gleiche Grundlinien haben, die Höhe von eh aber gleich ist 2 Dritteln der Höhe von Ai, und Parallelogramme von gleichen Grundlinien sich zu einander verhalten, wie ihre Höhen.

Wie vorhin ad, so wird jetzt eh mit den nächstfolgenden Parallelogrammen Ai, Cn u. s. w. verglichen.

L. Nun betrachtet die Parallelogramme eh und Ainh (An) und sagt mir, ob sie sich wie ihre Höhen, oder wie ihre Grundlinien zu einander verhalten. K. Diese Figuren verhalten sich weder wie ihre Höhen, noch wie ihre Grundlinien zu einander.

L. Warum wohl nicht? K. Weil sie weder gleiche Grundlinien, noch gleiche Höhen haben.

L. Wie werden sich denn wohl diese 2 Figuren zu einander verhalten? K. Wie die Producte aus ihren Höhen in ihre Grundlinien.

L. Und welches Product geben uns die beyden Ausdehnungen des Parallelogramms eh, da wir die Seite eines jeden dieser Quadrate einen Schuh nennen? K. Das Produkt 2.

L. Und welches Product geben die Ausdehnungen des Parallelogramms An? K. Das Product 6.

L. Wie verhält sich aber 2 zu 6? K. 2 ist der dritte Theil von 6.

L. Wie muß sich demnach das Parallelogramm eh zu dem Parallelogramm An verhalten? K. eh muß gleich seyn dem dritten Theile von An.

L. Jetzt will ich euch das, was ich euch erst abgefragt habe, im Zusammenhange vorsagen und sehen, wer mir alles wird gehörig nachsagen können. Das Parallelogramm e h muß drey Mahl in dem Parallelogramm A n enthalten seyn, weil das Product, welches die beyden Ausdehnungen des Parallelogramms e h geben, drey Mahl in dem Producte, welches die beyden Ausdehnungen des Parallelogramms A n geben, enthalten ist, und weil sich Parallelogramme von ungleichen Höhen und Grundlinien zu einander verhalten, wie die Produkte aus ihren Höhen in ihre Grundlinien. K. (versuchen diesen Satz nach zu sagen.)

L. Nun will ich sehen, wer mir, zugleich mit den Gründen seiner Aussage, wird angeben können, wie sich die Parallelogramme A i n h (A n) und C S s i (C s) zu einander verhalten. K. A n ist 2 Mahl in C s enthalten, weil das Product, welches die beyden Ausdehnungen von A n geben, 2 Mahl in dem Producte, welches die Ausdehnungen von C s geben, enthalten ist, und Parallelogramme von ungleichen Höhen und Grundlinien sich zu einander verhalten, wie die Producte aus ihren Höhen in ihre Grundlinien.

Auf diese Weise kann man noch von vielen andern Parallelogrammen von ungleichen Höhen und Grundlinien sagen lassen, wie sie sich zu einander verhalten.

L. Jetzt wollen wir einmahl verschiedene Quadrate mit einander vergleichen und ihr Verhältniß zu einander aufsuchen. Wißt ihr wohl noch, wie

wie sich diese Figuren zu einander verhalten? K. Ja! wie die Quadratzahlen ihrer Seiten.

L. Nun betrachtet diese Figur (Fig. 1. T. II.), die auch aus lauter gleichen Quadraten besteht, deren Seite wir wieder einen Schuh nennen wollen, und sagt mir geschwind, wie sich das Quadrat abcd (ac) zu dem Quadrate fgcé (fc) verhält, fügt aber auch gleich die Gründe eurer Behauptung bey. K. Das Quadrat ac muß in dem Quadrate fc 4 Mahl enthalten seyn, weil die Quadratzahl der Seite von ac in der Quadratzahl der Seite von fc vier Mahl enthalten ist, und sich Quadrate zu einander verhalten, wie die Quadratzahlen ihrer Seiten.

L. Auf eben die Art soll mir jetzt Carl sagen, wie sich das Quadrat hick zu dem Quadrate ac verhalten muß. K. Das Quadrat hc muß 9 Mahl so groß als das Quadrat ac seyn, weil die Quadratzahl der Seite des erstern Quadrats 9 Mahl so groß rc.

L. Nun soll Heinrich sagen, wie sich das Quadrat lmcn zu dem Quadrate ac verhält, und zugleich die Gründe seiner Aussage angeben. K. Das Quadrat lc ist 16 Mahl so groß, als das Quadrat ac, weil die Quadratzahl der Seite des erstern 16 Mahl so groß ist, als die Quadratzahl der Seite des letztern.

L. Jetzt sagt mir auch noch, wie sich das Quadrat oc, dann das Quadrat rc zu dem Quadrate ac verhält. K. (sagen dieß.)

L. August soll jetzt sagen, wie sich das Quadrat fc (fgce) zu dem Quadrat hick verhält und ebenfalls die Gründe seiner Aussage beyfügen.
K. Das Quadrat hc ist $2\frac{1}{4}$ Mahl so groß als das Quadrat fc, weil die Quadratzahl der Seite des erstern $2\frac{1}{4}$ Mahl so groß als die Quadratzahl der Seite des letztern ist, und sich Quadrate wie die Quadratzahlen ihrer Seiten zu einander verhalten.

Auf diese Art kann man noch sagen lassen, wie sich verhält.

das Quadrat fc zu dem Quadrat lc.
— Quadrat fc zu dem Quadrat oc.
— Quadrat hc zu dem Quadrat lc.
— Quadrat hc zu dem Quadrat oc.
— Quadrat lc zu dem Quadrat oc. u. s. w.

Nach diesen Sprechübungen kann man folgende und ähnliche Sätze und Fragen zur Uebung der Urtheilskraft vorlegen.

1) Der Bauer Hans hat ein Stück Land in der Figur eines Quadrates, dessen Seite 3 Ruthen lang ist. Der Bauer Merten hat auch ein Stück Land in der nämlichen Figur, deren Seite aber noch Ein Mahl so lang als die Seite von Hansens Quadrat ist. Es wird demnach behauptet, daß Mertens Land noch Ein Mahl so viel werth sey, als Hansens Land.

2) Ein Bauer hat zwey Gärten, wovon jeder die Figur eines Quadrates und gleich guten Boden hat.

hat. Die Seite des einen Gartens mißt 3, und die des andern 4 Ruthen: wie viel bekommt er für den größern Garten, wenn der kleinere 90 fl. werth ist? (Antw. Weil der größere $1\frac{7}{9}$ Mahl so groß als der kleinere ist, so bekommt er dafür 90 fl. und $\frac{7}{9}$ von 90 fl. d. h. 90 und 70 = 160 fl.)

3) Ein Rechteck, das 3 Schuh breit und 6 Schuh lang ist, enthält einen kleinern Flächenraum, als ein Quadrat, dessen Seite 4 Schuh lang ist.

4) Ein Pflasterer, welcher ein Quadrat pflastert, dessen Seite 6 Schuh lang ist, verdient mehr als ein anderer, der ein Rechteck pflästert, das 4 Schuh breit und 9 Schuh lang ist.

5) Ein Parallelogramm, dessen Grundlinie 3 Mahl so lang, als die Grundlinie eines andern Parallelogramms ist, ist auch 3 Mahl so groß als dieses andere. (Hier kommt es auf die Höhen an. Sind diese gleich, so ist der Satz richtig, außerdem nicht.)

6) Wie viel Quadratruthen muß ein Parallelogramm enthalten, welches 3 Mahl so groß seyn soll, als ein Quadrat, dessen Seite 5 Ruthen mißt?

7) Eine Bäuerin hat 2 Stücken Leinwand von einerley Güte. Das eine davon ist 20 Ellen lang und $\frac{5}{8}$ Ellen breit, das andere hält aber in der Länge 17, und in der Breite $\frac{3}{4}$ Ellen. Welches von diesen beyden Stücken ist mehr werth? (Hier muß man den Flächeninhalt beyder Stücken Leinwand, welche als Rechtecke angenommen werden,

 suchen.

suchen. Das letztere Stück ist 17 ganze oder $\frac{136}{8}$ Ellen lang und $\frac{6}{8}$ breit, folglich enthält es 816 gleiche Quadrate, deren Seite = $\frac{1}{8}$ Elle ist. Das erstere Stück welches $\frac{160}{8}$ Ellen lang und $\frac{5}{8}$ Ellen breit ist, enthält 800 gleiche Quadrate, deren Seite = $\frac{1}{8}$ Elle ist. Demnach ist das erste mehr werth, als das letztere.

Zwey und sechzigster Satz.

Aufgabe.

L., (welcher Fig. 16. Tab. I. ohne die punctirten Linien verzeichnet hat.) Glaubt ihr wohl, daß man dieses Dreyeck durch Hülfe eines Quadrates unmittelbar ausmessen könne? K. Nein.

L. Warum glaubt ihr dieses nicht? K. Weil die rechten Winkel nicht gerade in die spitzigen passen. (Weil rechte und spitzige Winkel einander nicht decken.)

L. Das ist richtig! Gleichwohl ist es möglich, den Inhalt dieses Triangels zu finden und in Quadraten, es seyen nun Quadratlinien, Quadratzolle u. s. w. anzugeben. Wie man dieses anzufangen habe, das sollt ihr durch euer Nachdenken selbst herausbringen. Vor allem sagt mir, von welcher Figur dieser Triangel gerade die Hälfte ist. K. Von einem Parallelogramme, das mit ihm gleiche Höhe und Grundlinie hat.

L. Könn-

L. Könntet ihr denn wohl herausbringen, wie viel unserer Schuhe (Fig. 3.) sowohl die Höhe als die Grundlinie desjenigen Parallelogramms, wovon dieser Triangel die Hälfte ist, halten muß, ohne es (das Parallelogramm) selbst zu verzeichnen? K. Ja wohl.

L. Wie könnt ihr denn dieses erfahren? K. Wenn wir die Höhe und Grundlinie dieses Triangels messen.

L. Allerdings. Und daß diejenige Linie, welche von der Spitze eines Triangels auf seine Grundlinie oder deren Verlängerung senkrecht gezogen wird, dessen Höhe ist, wißt ihr schon. Nun zieht erst die noch nöthige Linie, meßt dann die beyden Ausdehnungen dieses Dreyecks und sagt mir, wie viel Schuhe jede derselben beträgt. K. (ziehen die Ca, messen diese und die AB und sprechen:) die Höhe beträgt 4, und die Grundlinie ebenfalls 4 Schuh.

L. Wie viel Quadratschuhe muß demnach das Parallelogramm enthalten, das die gleiche Höhe und Grundlinie hat? K. 16 Quadratschuh.

L. Nun könnt ihr mir gewiß sagen, wie viel Quadratschuhe dieser Triangel enthalten muß: wie viel meynt ihr? K. Acht.

L. Warum glaubt ihr dieß? K. Weil er die Hälfte von einem Parallelogramm ist, das gerade 16 Quadratschuhe enthält.

L. Das ist richtig! und ihr habt jetzt abermahls die Auflösung einer gewissen Aufgabe gefun-

den. Wer sagt mir wohl, wie diese Aufgabe lautet? K Den Flächeninhalt eines Dreyecks zu finden.

L. Und wie wird diese Aufgabe aufgelöst? K. Wenn man die Höhe des Dreyecks mit der Grundlinie multiplicirt, und das dadurch entstandene Product halbirt (mit 2 dividirt).

L. Wie wollt ihr aber beweisen, daß dieses Verfahren richtig ist? K Wenn man die Höhe und Grundlinie eines Dreyecks mit einander multiplicirt, so findet man dadurch alle Mahl den Flächeninhalt eines Parallelogramms, das die nämliche Höhe und Grundlinie hat, folglich (nach einem schon erwiesenen Satze) noch einmahl so groß als dieses Dreyeck ist. Nimmt man nun den halben Flächeninhalt dieses Parallelogramms, so hat man ja offenbar den Flächeninhalt des Dreyecks, dessen Höhe und Grundlinie man mit einander multiplicirt hat.

L. Richtig! Und daß dieses auch durch die Erfahrung bestätigt werde, will ich euch jetzt auf verschiedene Art zeigen. Hier (Fig. 2. T. VII. der ersten Hälfte dieses Bdchs.) ist ein Dreyeck o p Q, dessen Höhe das von Q aus auf seine verlängerte Grundlinie gefällte, und in 8 gleiche Theile getheilte, Loth ist. In 8 solche Theile, die wir Schuhe nennen wollen, ist auch die Grundlinie getheilt. Nun sagt, welches Product wir bekommen, wenn wir die Höhe und Grundlinie dieses Dreyecks mit einander multipliciren. K. Das Product 64.

L. Und

L. Und die Hälfte hievon? K. Ist 32.

L. So viel unserer angenommenen Quadratschuhe muß also unserer Rechnung gemäß dieses Dreyeck enthalten. Nun seht, ob es deren wirklich so viel enthält. K. (stellen die Zählung wieder an, die sie schon in der ersten Hälfte anzustellen gelehrt worden sind.)

L. Jetzt seht, wie viel unserer Schuhe jede der beyden Ausdehnungen dieses Dreyecks (das Dreyeck BbCcDd Fig. 2. Tab. VII. der ersten Hälfte dieses Bändchens vorlegend) mißt. K. Die Höhe mißt deren 4, und die Grundlinie 2.

L. Wie viel Quadratschuhe muß demnach dieses Dreyeck enthalten? K. 4.

L. Und so viel enthält es auch, wie ihr seht. Denn 2 Ganze, 2 Halbe, und 4 Viertel machen ja gerade 4 Ganze.

Nun lasse man auch den Flächeninhalt der übrigen Dreyecke, die auf der erst erwähnten Tafel noch verzeichnet sind, finden, und zeige dann den Kindern, daß jedes derselben gerade so viel Quadrate enthält, als sie durch ihre Rechnung gefunden haben.

L., (welcher mit Nro. 14. Fig. 10. T. VIII der ersten Hälfte dieses Bändchens gebildet hat.) Hier habe ich ein Dreyeck gebildet, dessen Grundlinie aus 4 solchen gleichen Theilen besteht, davon die Höhe 2 enthält. Wenn wir jeden solchen Theil einen Schuh nennen, so muß der Flächeninhalt dieses Dreyecks betragen — nun wie viel Quadratschuhe? K. 4.

L. So viel beträgt er auch wirklich, wie ihr seht, wenn ich je 2 und 2 dieser kleinen Dreyecke, woraus das größere besteht, so an einander lege, daß sie ein Quadrat bilden. — — Da ihr nunmehr gewiß überzeugt seyd, daß der Flächeninhalt eines Dreyecks auf die von uns angegebene Art wirklich gefunden werde; so wollen wir uns ein bischen im Aufsuchen der Größe gegebener Dreyecke üben.

Man verzeichne nun allerley Dreyecke, lasse ihre Höhen und Grundlinien messen, und aus den gefundenen Zahlen ihren Flächeninhalt berechnen. Hiebey nehme man darauf Bedacht, daß die Grundlinien und Höhen auch bisweilen verschiedne Maßtheile, jene z. B. Schuhe, diese nur Zolle enthalten, damit die Kinder in der Uibung, größere Maßtheile in kleinere zu verwandeln, und diese am Ende wieder auf grössere zurückzuführen, erhalten werden.

Drey und sechzigster Satz.

Zusatz.

L. Wenn ihr bedenkt, 1) daß sich die Hälften wie ihre Ganzen zu einander verhalten, 2) daß jeder Triangel immer die Hälfte eines gewissen Parallelogramms ist, 3) daß sich Parallelogramme wie die Producte aus ihren Höhen in ihre Grundlinien zu einander verhalten: so werdet ihr mir sagen können, wie sich immer 2 Dreyecke zu einander verhalten müssen. K. Ebenfalls wie die

Pro-

Producte aus ihren Höhen in ihre Grundlinien.

L. Wir wollen einmahl sehen, ob dieß in der Erfahrung zutrifft. Hier (mit Nro. 18. Fig. 16. und 17. Tab. I. bildend) sind 2 Dreyecke A und ABC. Die Grundlinie sowohl, als die Höhe von A soll 2, jede der beyden Ausdehnungen von ABC aber 4 Zoll halten. Welches Product erhalten wir demnach aus der Höhe und Grundlinie von A? K. Das Product 4.

L. Und welches Product bekommen wir, wenn wir die Höhe und Grundlinie von ABC mit einander multipliciren? K. Das Product 16.

L. Wie oft ist denn 4 in 16 enthalten? K. 4 Mahl.

L. Wie oft muß also nach unserm erst aufgestellten Satze der Triangel A in dem Triangel ABC enthalten seyn? K. 4 Mahl.

L. Und dieses ist auch wirklich der Fall; denn ich kann, wie ihr seht, aus ABC vier A machen. (Den Triangel ABC in 4 kleinere, wovon jeder so groß als A ist, zerlegend.

Man kann hier auch noch die Triangel bBcCdD und opQ Fig. 2. Tab. VII. der ersten Hälfte vorlegen, bey erstern das Product 8, bey letztern aber das Product 64 finden, und dann in beyden Figuren die Quadrate zusammen zählen lassen, wo sich dann ergeben wird, daß opQ deren 8 Mahl so viel enthält, als bBcCdD.

L. Jetzt sagt mir, in welchen Fällen man sich bey der Vergleichung zweyer Parallelogramme einige

einige Mühe ersparen und das Aufsuchen der Producte aus ihren Höhen in die Grundlinien unterlassen kann. K. Wenn diese Figuren entweder gleiche Grundlinien oder gleiche Höhen haben.

L. In den nämlichen Fällen können wir auch bey Vergleichung zweyer Dreyecke diese Mühe ersparen. Denn weil sich, wie ihr schon oft gehört habt, die Hälften wie die Ganzen zu einander verhalten, so verhalten sich auch Dreyecke von gleichen Höhen zu einander wie ihre Grundlinien, da hingegen Dreyecke von gleichen Grundlinien in dem Verhältnisse ihrer Höhen zu einander stehen. Wenn ich euch nun frage, was ich nur zu messen brauche, wenn ich das Verhältniß, worin diese zwey, zwischen einerley Parallelen befindliche Dreyecke (dergleichen verzeichnend) zu einander stehen, erfahren will, so werdet ihr antworten — ? K. Ihre Grundlinien.

L. Aus welchem Grunde antwortet ihr aber so? K. Weil sich Dreyecke von gleichen Höhen zu einander verhalten, wie ihre Grundlinien.

L. Aber was muß ich messen, wenn ich erfahren will, wie sich diese zwey Dreyecke, deren Grundlinien einander gleich sind, (dergleichen verzeichnend) zu einander verhalten? K. Ihre Höhen.

L. Warum behauptet ihr dieses? K. Weil sich Dreyecke von gleichen Grundlinien wie ihre Höhen zu einander verhalten.

L. Daß

L. Daß auch diese Sätze durch die Erfahrung bestätigt werden, will ich euch jetzt zeigen. Hier (Fig. 20. Tab III. vorlegend) sind 2 Dreyecke ABC und DEF, die gleiche Grundlinien, aber verschiedene Höhen haben. Seht nun, wie oft die Höhe BC in der Höhe EF enthalten ist. K. Zwey Mahl.

L. Wie oft muß demnach das Dreyeck ABC in dem Dreyecke DEF enthalten seyn? K. Zwey Mahl.

L. Und so ist es auch. Denn das Dreyeck ABC enthält, wie ihr seht, drey ganze und drey halbe, zusammen also $4\frac{1}{2}$ unserer angenommen Quadratschuhe, da wir deren hingegen in dem Dreyecke DEF 9, also 2 Mahl so viel, als in ABC, zusammenzählen können. Jetzt betrachtet die Dreyecke DEF und FGA (Fig. 20. T. III.), welche gleiche Höhen, aber verschiedene Grundlinien haben, und sagt, wie sich die Grundlinie DF zur Grundlinie FA verhält. K. DF ist $1\frac{2}{3}$ Mahl in FA enthalten.

L. Wie oft wird demnach das Dreyeck DEF in dem Dreyecke FGA enthalten seyn müssen? K. Auch $1\frac{2}{3}$ Mahl.

L. Nun zählt einmahl die ganzen, halben und Viertels-Quadrate in DEF zusammen und sagt, wie viel die ganze Summe ausmacht. K. 6 Ganze, 3 Halbe und 6 Viertel machen gerade 9 Ganze.

L. Wie viel solcher Quadrate muß demnach das Dreyeck FGA enthalten, da es $1\frac{2}{3}$ Mahl so groß als DEF seyn soll? K. 15.

L. Wir wollen sehen, ob wir deren soviel heraus bringen. Wir finden erstlich in der Mitte 9 ganze; zweytens linker Hand in den mit m bezeichneten Stücken 3 halbe, und in denen, die mit n bezeichnet sind, 6 Viertel, auf dieser Seite zusammen also 3 ganze; drittens rechter Hand in den o. Stücken 6 Drittel, und in den p. Stücken 6 halbe Drittel oder 6 Sechstel. Sechs Drittel und 6 Sechstel sind aber 18 Sechstel oder 3 Ganze. Es enthält also dieses Dreyeck wirklich 15 unserer Quadratschuhe, wie ihr vorhin behauptet habt, und ist demnach wirklich $1\frac{2}{3}$ Mahl so groß, als das Dreyeck DEF.

Hier kann folgende Sprechübung wieder angestellt werden:

L. Jetzt will ich sehen, wer mir zugleich mit den Gründen seiner Aussage wird bekannt machen können, wie sich je 2 und 2 dieser Dreyecke (Fig. 18. T. III.), die zwischen einerley Parallelen stehen, und deren Grundlinien alle in einerley gleiche Theile getheilt sind, zu einander verhalten. K. Das Dreyeck A ist halb so groß als das Dreyeck B, weil beyde Figuren von gleichen Höhen sind, die erstere aber eine halb so große Grundlinie als die letztere hat, und Dreyecke von gleichen Höhen sich zu einander verhalten wie ihre Grundlinien. Das Dreyeck A ist so groß als $\frac{1}{3}$ von dem Dreyecke C, weil beyde Figuren gleiche Höhen haben, die Grundlinie der erstern aber gleich ist Einem Drittel von der Grundlinie der letztern, und Dreyecke von gleichen Höhen ꝛc.

Auf

Auf diese Art kann man noch vergleichen lassen 1) das Dreyeck A mit den Dreyecken D, E, F, G und H; 2) das Dreyeck B mit den Dreyecken C, D, E, F, G und H; 3) das Dreyeck C mit den Dreyecken D, E, F, G und H. u. s. w.

L. Nun sollt ihr mir auch sagen, wie sich je zwey und zwey dieser Dreyecke (Fig 19. T. III.), deren Grundlinien alle gleich groß, deren Höhen aber verschieden sind und durch die gleichen Entfernungen dieser Parallellinien gemessen werden, zu einander verhalten. K. Das Dreyeck a ist halb so groß, als das Dreyeck b, weil beyde Figuren gleiche Grundlinien haben, die Höhe von a aber 2 Mahl in der Höhe von b enthalten ist, und sich Dreyecke von gleichen Grundlinien zu einander verhalten wie ihre Höhen.

Auf diese Art wird, wie vorhin, das Verhältniß, worin je zwey und zwey dieser Dreyecke zu einander stehen, angegeben. Endlich kann man auch sagen lassen, der wie vielste Theil ein jedes dieser Dreyecke von dem (mit punctirten Linien angezeigten) Parallelogramme ist, worin es steht. Z. B. das Dreyeck a ist die Hälfte von dem Parallelogramm m n o p, weil es mit ihm einerley Grundlinie und Höhe hat. Nun ist aber das Parallelogramm m n o p der achte Theil von dem Parallelogramme m p q r, folglich ist das Dreyeck a die Hälfte von dem achten Theile des Parallelogramms m n q r, d. h. das Dreyeck a ist $\frac{1}{16}$ von dem Parallelogramme m n q r. Das Dreyeck b ist die Hälfte von dem Parallelogramm i k l p, weil ꝛc. Nun ist das Parallelogramm i k l p das Viertel von dem Parallelogramme

p l m q, folglich ist das Dreyeck b $\frac{\frac{1}{2}}{4}$, oder $\frac{1}{8}$ von dem Parallelogramme p l m q u. s. w.

Uebung der Einbildungs- und Urtheilskraft.

L. Jetzt denkt euch einmahl ein Rechteck auf unserer Tafel verzeichnet, dessen Grundlinie 12, und dessen Höhe 6 Schuh beträgt. Dieses Rechteck theile ich durch 2 Linien, die ich mit der linken oder rechten Seitenlinie parallel ziehe, in drey gleiche Theile, über die Grundlinie eines dieser Theile beschreibe ich ein Dreyeck, dessen Spitze an der obern (der Grundlinie gegen überstehenden) Seite liegt. Nun frage ich, wie viel Quadratschuhe dieses Dreyeck enthält? K. 12.

L. Gebt mir auch die Gründe dieser eurer Behauptung an. K. Das ganze Rechteck wird durch die 2 mit den Seitenlinien parallel gezogenen Linien in 3 kleinere Rechtecke getheilt, wovon jedes 6 Schuh hoch und 4 Schuh breit ist, folglich einen Flächenraum von 24 Quadratschuhen einnimmt. Da nun das verzeichnete Dreyeck, mit einem solchen Parallelogramme einerley Höhe und Grundlinie hat; so muß es halb so groß seyn, folglich 12 Quadratschuh enthalten.

L. Gut! Denkt euch abermahls ein Rechteck, dessen Grundlinie 8 Schuh lang ist, und die ich so theile, daß der eine Theil 5 der andere 3 Schuh mißt. Uiber jeden dieser Theile beschreibe ich ein Dreyeck, welches mit dem Rechtecke gleiche Höhe hat.

hat. Nun frage ich, wie oft das kleinere dieser Dreyecke in dem größern enthalten ist. K. $1\frac{2}{3}$ Mahl.

L. Wie wollt ihr mir dieses beweisen? K. Da diese Dreyecke gleiche Höhen, aber verschiedene Grundlinien haben; so müssen sie sich wie diese letztern zu einander verhalten. Nun ist aber die eine Grundlinie, die 3 Schuh hat, in der andern, die 5 Schuh mißt, $1\frac{2}{3}$ Mahl enthalten, folglich ꝛc.

L. Das ist recht! Aber der wievielste Theil ist das kleinere Dreyeck von dem größern? K. Drey Mahl der 5te Theil.

L. Und der wievielste Theil ist es (das kleinere Dreyeck) von dem ganzen Parallelogramme? K. Drey Mahl der 16te Theil ($\frac{3}{16}$).

L. Wie wollt ihr mich von der Wahrheit dieser Behauptung überzeugen? K. Wenn man von dem Theilungspuncte der Grundlinie des ganzen Rechtecks eine senkrechte Linie bis zur gegenüberstehenden Seite zieht, so wird es dadurch in 2 kleinere Rechtecke, wovon das eine $\frac{3}{8}$, das andere $\frac{5}{8}$ vom Ganzen enthält, eingetheilt. Beschreibt man nun über die Grundlinie des kleinern einen Triangel, der mit ihm (diesem kleinern Rechtecke) einerley Höhe hat, so muß dieser gerade die Hälfte davon, also $\frac{3}{16}$ vom Ganzen betragen.

L. Nun denkt, ich habe ein Quadrat vor mir, dessen Seite 6 Schuh lang ist. Diese Figur theile ich in 3 gleiche Rechtecke, und nun beschreibe ich einen Triangel, der mit einem solchen Rechtecke glei-

che Höhe und Grundlinie hat. Wie viel Quadratschuhe muß dieser Triangel enthalten? K. 6.

L. Wie beweist ihr dieses? K. Das ganze Quadrat muß 36, das Drittel davon also 12 Quadratschuhe enthalten. Nun ist aber ein Dreyeck von den angegebenen Beschaffenheiten halb so groß, als eines dieser aus dem Quadrate gemachten Rechtecke; folglich muß es die Hälfte von 12 Quadratschuhen, d. h. 6 Quadratschuhe enthalten.

L. Aber der wievielste Theil ist ein solches Dreyeck vom ganzen Quadrate? K. Der 6ste.

L. Wie groß muß wohl ein Parallelogramm seyn, welches vier Mahl so groß als ein Dreyeck ist, dessen Grundlinie 4, und dessen Höhe 5 Schuh beträgt? K. Es muß 40 Quadratschuhe enthalten.

Daß dieß nur ein Fingerzeig zu sehr nützlichen Uibungen sey, versteht sich von selbst.

Vier und Sechzigster Satz.

Aufgabe.

L. Hier (Fig. 21.. T. IV.) habe ich ein unregelmäßiges Fünfeck verzeichnet, und dasselbe durch einige Diagonalen in Dreyecke zerlegt. Könntet ihr mir wohl den Flächeninhalt eines jeden dieser Dreyecke finden? K. Ey freylich.

L. Wie denn? K. Wenn wir eines jeden Höhe und Grundlinie mäßen und rc.

L. Gesetzt, das Dreyeck AED hielte $3\frac{3}{4}$, ADC 3, und ACB $3\frac{1}{2}$ Quadratschuhe: wie viel Quadratschuhe müßten denn wohl diese 3 Dreyecke zusammen genommen halten? K. $10\frac{1}{4}$.

L. Die 3 Theile, worein dieses Fünfeck getheilt ist, hielten nach unserer Annahme zusammen genommen $10\frac{1}{4}$ Quadratschuh: wie groß müßte demnach das ganze Fünfeck seyn? K. Es müßte ebenfalls $10\frac{1}{4}$ Quadratschuh enthalten.

L. Freylich! Denn das Ganze ist ja allen seinen Theilen zusammen genommen gleich. Jetzt sagt mir, wie ihr es wohl anfangen würdet, wenn ihr den Flächeninhalt dieser Figur (ein anderes unregelmäßiges Fünfeck neben Fig. 21. verzeichnend) suchen solltet? K. Da würden wir sie durch Diagonalen in Dreyecke theilen, jedes dieser Dreyecke ausrechnen und den Inhalt von allen Dreyen in Eine Summe bringen.

L. Dieses Verfahren wäre richtig, und da man jedes Polygon durch Diagonalen, die aber einander nicht schneiden dürfen, in Dreyecke zerlegen kann; so könnt ihr mir gewiß sagen, wie man den Flächeninhalt irgend eines Polygons findet. Wer sagt mir dieß? K. Man theilt das Polygon durch Diagonalen, die aber einander nicht schneiden dürfen, in lauter Dreyecke, rechnet jedes einzeln aus, und bringt ihren Inhalt am Ende in Eine Summe.

L. Gut! Jetzt betrachtet einmahl dieses reguläre Sechseck (Fig. 26. Tab. IV.) und sagt

mir, ob wir es nicht in lauter gleiche Triangel zerlegen können. K. Das kann man allerdings.

L. Wie verfährt man denn hiebey? K. Man zieht aus dem Mittelpuncte des Kreises, worein es beschrieben ist, gerade Linien in seine Spitzen.

L. Und wie viel bekommt man alsdann gleiche Dreyecke? K. Sechs.

L. Nun zerlegt einmahl dieses Sechseck auf die angegebene Weise in lauter gleiche Dreyecke. K. (machen aus Fig. 26. Fig. 22.) —

L. So! Jetzt sagt mir, ob es wohl nöthig ist, den Flächeninhalt eines jeden dieser Dreyecke besonders zu suchen, wenn wir den Inhalt des ganzen Sechsecks finden wollen. K. Das ist nicht nöthig.

L. Was ist denn nur zu thun, um den angegebenen Zweck zu erreichen? K. Da dürfen wir nur den Inhalt eines einzigen dieser Dreyecke suchen und ihn alsdann sechs Mahl nehmen.

L. Warum ist es denn nicht nöthig jedes dieser Dreyecke einzeln auszurechnen? K. Weil sie alle einander gleich sind.

L. Gut! Kann man denn nur ein reguläres Sechseck in so viel gleiche Dreyecke zerlegen als es Seiten hat? K. Nein.

L. Bey welchen Figuren ist dieses sonst noch möglich? K. Bey allen regulären Polygonen.

L. Nun werdet ihr mir gewiß sagen können, wie man den Flächeninhalt irgend eines regulären Polygons findet. Wer sagt mir, wie dieses anzufan-

fangen ist? K. Man theilt das reguläre Polygon in lauter gleiche Dreyecke, indem man in seine Spitzen die Halbmesser des Kreises zieht, worein es beschrieben ist, sucht erstlich den Inhalt eines einzigen dieser Dreyecke und multiplicirt diesen mit der Zahl der vorhandenen Dreyecke (der Seiten des Polygons).

L. Das ist recht. Nur merkt, daß man dieses Verfahren abkürzen und auch folgender Massen zum Ziele gelangen kann. Man zieht aus dem Mittelpunkte des auszurechnenden regulären Polygons eine senkrechte Linie auf eine seiner Seiten, z. B. hier (Fig. 23.) die Linie a b. Diese Linie zeigt die Höhe eines jeden derjenigen gleichen Triangel an, in die man das ganze Polygon zerlegen kann, wenn man aus seinem Mittelpuncte gerade Linien in seine Spitzen zieht. Nun multiplicirt man diese Linie mit einer Seite des Polygons, weil diese (Seite) als die Grundlinie eines solchen Triangels angesehen werden kann, sucht von dem auf diese Art gefundenen Producte die Hälfte, und multiplicirt diese abermahls mit der Zahl der Seiten des Polygons. Hätte z. B. die Linie a b (Fig. 23.) 3, die Seite CD 3 Schuh, 4 Zoll, so könnten wir sprechen: 30 Mahl 34 ist 1020, die Hälfte hievon ist 510, 510 mit der Zahl der Seiten dieser Figur multiplicirt giebt 3060, welches die Zahl der Quadratzolle dieses Sechsecks wäre. Nunmehr wollen wir

uns in der Ausrechnung so wohl irregulärer als regulärer Polygone eine Zeitlang üben.

Diese Uibung wird nun angestellt und dabey gezeigt, wie sich 2 Dreyecke, die eine gemeinschaftliche Seite haben, und daher ein Trapezium ausmachen, wie z. B. Fig. 21, die beyden Dreyecke AED und ADC, sich auf einmahl aus rechnen lassen, indem man die gemeinschaftliche Seite AD in beyden Triangeln zur Grundlinie annimmt, sie in die Summe der beyden senkrechten Linien aus den gegenüberstehenden Spitzen Em und Cn multiplicirt und das Product halbirt.

Fünf und sechzigster Satz.

Zusatz.

L., (welcher Fig. 24. und 25. Tab. IV. verzeichnet hat.) Urtheilt doch einmahl nach dem Augenmaße und sagt mir, welcher von den Theilen, worein ich die Linie AG (Fig. 25.) hier getheilt habe, der größte ist. K. Es scheint einer so groß als der andere zu seyn.

L. Der Schein trügt euch dieß Mahl nicht, denn ich habe diese Theile alle einander gleich gemacht. Nun könnt ihr mir wohl auch sagen, ob die Dreyecke, worein ich das Dreyeck AGH getheilt habe, alle von einerley Größe sind oder nicht. K. Sie sind alle von einerley Größe.

L. Beweißt mir dieses einmahl mit einem förmlichen Schluße. K. Alle Dreyecke, die gleiche Grund-

Grundlinien und Höhen haben, sind einander gleich. Diese Dreyecke hier haben ꝛc. folglich ꝛc.

L. Wie verhalten sich aber diese kleinern Dreyecke zusammen genommen zu dem ganzen Dreyecke AGH? K. Sie sind ihm gleich.

L. Nach welchem Grundsatze behauptet ihr dieses? K. Nach diesem: Das Ganze ist allen seinen Theilen zusammen genommen gleich.

L. Nun sagt mir, wie sich der Triangel acb (Fig. 24.) zu dem Triangel AHB verhalten muß, da ich beyden Figuren gleiche Höhen und Grundlinien gegeben habe. K. Da müssen auch alle beyde einander gleich seyn.

L. Aber welcher von diesen 12 Triangeln (Fig. 24. u. 25.) wird wohl der größte seyn? K. Einer ist so groß als der andere.

L. Woher wißt ihr dieses? K. Weil alle gleiche Höhen und Grundlinien haben müssen, da acb und AHB diese Beschaffenheiten haben und die Dreyecke in jeder Figur einander gleich sind.

L. Wenn, wie ihr ganz richtig behauptet, diese 12 Dreyecke (Fig. 24. u. 25.) alle einerley Größe haben; so könnt ihr mir ja auch sagen, wie sich das reguläre Sechseck (Fig. 24.) da zu dem Dreyecke AHG (Fig. 25.) verhalten muß. K. Beyde Figuren müssen einander gleich seyn.

L. Richtig! Denn da alle ihre einzelnen Theile einander gleich sind, so müssen sie selbst auch gleiche Größe haben, und wir können uns vorstellen, als hätten wir die 6 Dreyecke von dieser Fi-

gur (Fig. 24.) hieher (Fig. 25.) gelegt ihre Gestalt, aber nicht ihre Größe, verändert und daraus das Dreyeck A G H gebildet. Jetzt sagt mir doch, wie sich die Grundlinie des Dreyecks A G H zu den Seiten des Sechsecks (Fig. 24.) zusammen genommen, d. h. zu dem Perimeter desselben verhalten muß. K. Da die 6 Theile von der Seite A G alle einander gleich sind, und A B so groß als a b ist; so muß A G gerade so groß als 6 a b oder, welches einerley ist, so groß als die 6 Seiten des regulären Sechsecks zusammen genommen seyn.

L. Wir können also sagen, die Grundlinie dieses Dreyecks ist gleich dem Perimeter (Umfange) dieses Sechsecks. Nun merkt, daß wir die Linie c d (Fig. 24.) welche die Höhe von a c b anzeigt, den Abstand einer Seite des Sechsecks vom Mittelpuncte nennen wollen, und sagt mir, wie sich die Höhe des Dreyecks A G H zu dem Abstande einer Seite des Sechsecks (Fig 24.) vom Mittelpuncte verhält. K. Beide Größen (Linien) sind einander gleich, weil Sie sie einander gleich gemacht haben.

L. Faßt jetzt alles zusammen und sagt mir, welcher Größe die Grundlinie, und welcher (Größe) die Höhe dieses Dreyecks (A H G Fig. 25.) ganz gleich ist. K. Die Grundlinie ist gleich dem Perimeter dieses Sechsecks, die Höhe aber ist so groß, als der Abstand einer seiner Seiten vom Mittelpuncte.

L. Unter diesen Umständen konnten wir aus dem Dreyecke A G H gerade so viel Dreyecke von der nämlichen Größe machen, als aus diesem

Sechs-

Sechsecke (Fig. 24.) und auf diese Weise darthun, daß beyde Figuren gleiche Flächenräume einnehmen müssen. Da man nun alle Mahl aus einem Dreyecke, dessen Grundlinie dem Perimeter einer regulären Figur, und dessen Höhe dem Abstande einer Seite dieser Figur vom Mittelpuncte gleich ist, eben so viel kleinere Dreyecke von der nämlichen Größe machen kann, als aus dieser regulären Figur, wenn man aus ihrem Mittelpuncte gerade Linien in ihre Spitzen zieht; so können wir folgenden Satz aufstellen: Ein Dreyeck gleicht einer regulären Figur, wenn seine Grundlinie eben so groß ist, als die Summe aller Seiten (der Perimeter) dieser Figur, und seine Höhe gleich kommt dem Abstande einer Seite vom Mittelpuncte. Nun will ich sehen, wer mir diesen Satz ganz fehlerfrey nachsagen kann. K. (wiederhohlen.)

L. Wenn ich nun sagte: verzeichnet ein Dreyeck, welches diesem regulären Fünfecke (dergleichen Figur verzeichnend) an Größe gleich kommt, wie könntet ihr dieses am leichtesten bewerkstelligen? K. Wenn wir 1) eine Seite dieses Fünfecks mäßen und die Grundlinie des zu verzeichnenden Dreyecks fünf Mahl so lang machten; 2) den Abstand einer Seite dieses Fünfecks von seinem Mittelpuncte suchten und diesen zur Höhe des Dreyecks annähmen.

L. Gut! Macht es einmahl so. K. (thun dieß.)

L. Was könnt ihr jetzt von diesen beyden Figuren (dem Fünfecke und dem Triangel) in Ansehung ihres Verhältnißes zu einander behaupten? K. Daß beyde einander gleich seyn müssen.

L. Und aus welchem Grunde könnt ihr dieses behaupten? K. Weil dieses Dreyeck hat 1) eine Grundlinie, die so lang als der Perimeter des Fünfecks ist, 2) eine Höhe, die dem Abstande einer Seite des Fünfecks von seinem Mittelpuncte gleich kommt.

Man lasse hier mehrere reguläre Polygone auf die jetzt angegebene Art in gleich große Dreyecke verwandeln und dabey immer den Grund, aus welchem das verfertigte Dreyeck dem gegebenen Polygon gleich seyn muß, darlegen, damit die Kinder mit dem hier vorgetragenen Satze recht vertraut werden.

Sechs und sechzigster Satz.

Lehrsatz.

L. Hier (Fig. 26. u. 27.) habe ich 2 gleiche Kreise und in jeden ein Polygon beschrieben. Wie viel jedes dieser Polygone Seiten hat, wünsche ich von euch zu hören. K. Das erste hat deren 6, und das 2te 12.

L. Da hat also das nächstfolgende dieser Polygone noch Ein Mahl so viel Seiten, als das vorhergehende. Nun sagt mir, welches von diesen Poly-

Polygonen seiner Gestalt nach einem Kreise am nächsten kommt. K. Das Zwölfeck.

L. Und welches ist am meisten vom Kreise unterschieden? K. Das Sechseck.

L. Wenn mag nun wohl ein reguläres Polygon einem Kreise nahe kommen, wenn es wenig oder recht viele Seiten hat. K. Wenn es recht viele Seiten hat.

L. Richtig! Je mehr ein reguläres Polygon Seiten hat, desto näher kommt es einem Kreise. Ja man kann sogar beweisen, daß es ein reguläres Polygon gebe, dessen Seiten alle in die Kreislinie fallen, die aus dem Mittelpuncte dieses Vielecks beschrieben werden kann, und daß man deßwegen den Kreis als ein reguläres Polygon zu betrachten habe, dessen Seiten aber so klein sind, daß wir sie als gerade Linien nicht mit den Augen wahrnehmen, also auch nicht zählen, sondern nur mit dem Verstande denken können. Da aber dieser Beweis für euch noch zu schwer ist; so übergehe ich ihn, und begnüge mich nur damit, eurem Gedächtniße folgenden Satz, den ihr einstweilen auf mein Wort glauben müßt, einzuprägen: **Jeder Kreis ist im Grunde ein reguläres Polygon, dessen Seitenzahl wir nur nicht angeben können** *). Nun denkt einmahl nach und sagt

*) Diesen Satz stellt **Langsdorf** in seinen Anfangsgründen der reinen Elementar- und höhern Mathematik S. 218, §. 146. auf. Wen die Lust anwandelt, mich zu tadeln, daß ich ihn hier vortrage, den bitte ich zu über-

sagt mir, welche Linie wohl den Abstand einer Seite des Polygons, das wir Kreis nennen, von seinem Mittelpuncte anzeigen muß. K. Der Halbmesser.

L. Warum glaubt ihr dieses? K. Weil wir die Peripherie als aus den Seiten des Polygons zusammengesetzt ansehen können. (Weil jeder Punct in der Peripherie in einer Seite des Polygons liegen muß.)

L. Gut! Jetzt will ich die zwey Vordersätze eines Schlußes aussprechen und sehen, ob ihr den Schlußsatz dazu finden könnt. Jedes reguläre Vieleck ist einem Triangel gleich, welcher zur Grundlinie den Umfang des Vielecks und zur Höhe den Abstand einer seiner Seiten vom Mittelpuncte hat; der Kreis ist ein reguläres Vieleck. K. Also ist er (der Kreis) einem Triangel gleich, welcher zu seiner Grundlinie den Umfang des Kreises und zu seiner Höhe den Abstand einer seiner Seiten vom Mittelpuncte, d. h. den Halbmesser hat.

L. Hier (Fig. 28. Tab. IV.) ist ein Kreis A, und hier (Fig. 29.) ein Dreyeck B. Das Dreyeck hat

überlegen, ob dieser in Rede stehende, oder der gewöhnlich aufgestellte Satz: Ein Kreis ist ein Vieleck von unendlich vielen Seiten, Kindern verständlicher ist. Ich wenigstens habe gefunden, daß sich diese bey dem Ausdrucke: ein Polygon von unendlich viel Seiten, nichts denken.

hat eine Grundlinie, die so lang ist, als die Umfangslinie (Peripherie) von A, und eine Höhe CD, die dem Halbmesser cd vom Kreise A gleich kommt. Nun sagt mir, welche von beyden Figuren den größern Flächenraum einnehmen (die größere seyn) muß. K. Es muß eine so groß als die andere seyn.

L. Wie lautet der Satz, nach welchem ihr dieses behaupten könnt? K. Der Kreis gleicht einem Triangel, welcher ꝛc.

L. Gesetzt nun, wir suchten den Flächeninhalt des Dreyecks B, welcher Figur Größe (Flächeninhalt) fänden wir dadurch zugleich mit? K. Den Flächeninhalt des Kreises A.

L. Freylich! Nun könnt ihr mir gewiß sagen, was wir nur thun dürfen, wenn wir den Flächeninhalt eines Kreises, welche Figur nie mit einem Quadrate unmittelbar ausgemessen werden kann, finden wollen. K. Da dürfen wir nur ein Dreyeck verzeichnen, dessen Grundlinie der Peripherie und dessen Höhe dem Halbmesser des gegebenen Kreises gleich kommt, und dann den Inhalt dieses Dreyecks auf die uns schon bekannte Art suchen.

L. Das ist recht! Hier ist ein Kreis (dergleichen verzeichnend), dessen Flächeninhalt ihr mir suchen sollt. Ehe ihr nun das zur Erreichung dieses Zweckes nöthige Dreyeck verzeichnet, müßt ihr wissen, wie lang ihr seine Grundlinie machen sollt. Wie lang wollt ihr sie nun machen? K. So lang als die Umfangslinie des gegebenen Kreises.

L. Gut!

L. Gut! Da müßt ihr aber wissen wie viel Zoll ꝛc. diese Kreislinie mißt, um eine gerade Linie von gleicher Länge verzeichnen zu können. Meßt sie also. K. —

L. Nicht wahr? ihr stoßt hier auf eine Schwierigkeit, indem ihr nicht wißt, wie ihr die Kreislinie unmittelbar mit dem Längenmaße messen sollt? Ich will euch nur sagen, daß dieß gar nicht möglich ist, und man daher auf ein besonderes Mittel bedacht seyn mußte, den Umfang eines Kreises im Längenmaße darzustellen. Dieses Mittel will ich euch nun bekannt machen.

Sieben und sechzigster Satz.

Aufgabe.

L. Durch Nachdenken und mühsame Rechnungen haben die Gelehrten gefunden, daß der Umfang eines Kreises immer noch etwas größer, als sein Durchmesser drey Mahl genommen, ist. Dieses Verhältniß drückt man genauer durch die Zahlen 100 : 314 aus und spricht: wie sich verhält 100 zu 314, so verhält sich der Durchmesser eines Kreises zu seinem Umfange (der Kreislinie). D. h. Wenn der Durchmesser eines Kreises gerade in 100 gleiche Theile z. B. in 100 Zolle eingetheilt würde, so würde die Kreislinie, wenn sie wie etwa ein Faden ausgestreckt und in eine gerade Linie verwandelt werden könnte, 314 solche Theile und ein noch ganz unmerkliches Stückchen darüber enthalten. Dieses un-

unmerkliche Stückchen achtet man aber gewöhnlich nicht und sagt nur: der Diam. : Periph. = 100 : 314. Da nun dieser Umstand einmahl ausgemacht ist, so kann man durch ein leichtes und gewöhnliches Regeldetri-Exempel den Umfang eines jeden Kreises, er sey groß oder klein, im Längenmaße finden, so bald man nur die Länge des Durchmessers, der als gerade Linie leicht gemessen werden kann, weiß. Einige Beyspiele werden euch das hiebey zu beobachtende Verfahren lehren. Meßt einmahl den Durchmesser dieses Kreises (Fig. 28. T. IV.) und seht, wie viel unserer Schuhe er hat. K. (messen und sprechen:) Vier.

L. Nun urtheilen wir also: Ein Durchmesser von 100 Schuhen giebt eine Peripherie von 314 Schuhen, welche Peripherie giebt also ein Durchmesser von 4 Schuhen? K. (setzen an und rechnen folgendermassen:

```
100 — 314  —  4 ?
     |  4  |
100  |-----|--
     |1256 |12
     |100  |
     ------
     - 256
       200
   ---------
     — 56
   ---------
      100
```

das heißt: 12 Schuh und $\frac{56}{100}$ eines Schuhes oder 12′, 5″, 6‴ hält diese Peripherie, wenn die Länge ac einen Schuh bedeutet. Dieses Exempel stimmt übri-

übrigens mit folgendem ganz überein: Für 100 Thlr. erhalte ich 314 Ellen (ꝉb), wie viel erhalte ich für 4 Thlr.?

L. Jetzt meßt den Durchmesser dieses Kreises (dergleichen Figur mit einem Halbmesser von 3 Schuh verzeichnend). K. (messen und sprechen:) Dieser Durchmesser mißt 6 Schuh.

L. Wie lautet nun das Regeldetri-Exempel, das ihr jetzt ansetzen müßt, wenn ihr den Umfang dieses Kreises im Längenmaße herausbringen wollt? K. Ein Durchmesser von 100 Schuhen giebt alle Mahl eine Peripherie von 314 Schuhen, wie viel Schuh hält die Peripherie, die ein Durchmesser von 6 Schuhen giebt? oder: wie sich 100 zu 314 verhält, so verhält sich auch 6 zu der zu suchenden Peripherie dieses Kreises.

L. Nun setzt das Exempel ordentlich an und rechnet. K. (rechnen:

100 — 314 — 6?
6

100) 18|84

oder:

100 : 314 = 6′ : Per.)

L. D. h. 18′, 8″, 4‴ hält die Peripherie dieses Kreises. Nun sehe ich, daß ihr abermahls eine gewisse Aufgabe auflösen gelernt habt. Wie lautet diese? K. Die Peripherie eines Kreises

zu

zu finden, wenn der Durchmesser bekannt ist.

L. Und wie wird diese Aufgabe aufgelöst? K. Wenn man die Zahl 314 mit dem gegebenen Durchmesser multiplicirt, und das Product mit 100 dividirt. (Wenn man ein Regeldetri-Exempel ansetzt und berechnet, das im ersten Satze die Zahl 100, im zweyten die Zahl 314 und im dritten die Zahl, die die Größe des gegebenen Durchmessers anzeigt, enthält.)

L. Jetzt rechnet mir einmahl aus, wie viel der Umfang eines Mühlenrades, das wir als einen Kreis betrachten wollen, betragen muß, wenn sein Durchmesser 12 Schuh lang ist. K. (setzen an und rechnen:)

100 — 314 — 12?
12
———
628
314
———
100) 37|68 ≐ 37′, 6″, 8‴

L. Nun rechnet auch aus, wie lang das schon hinlänglich ausgedehnte Stück Eisen seyn muß, welches ein Schmid um ein Wagenrad, das 5 Schuh im Durchmesser hält, legen will? K. setzen an und rechnen:

100 — 314 — 5?
5
———
100) 15|70 = 15′, 7″)

Man lasse hier noch folgende und ähnliche Exempel ausrechnen:

1) Wieviel beträgt der Umfang eines Faßbodens, wenn sein Durchmesser 3 Schuh hat?

2) Wie viel beträgt der Umfang der Welle eines Mühlenrades, die im Durchmesser 2 Schuh und 6 Zoll hat?

3) Wie viel beträgt der Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser 3 Stunden lang ist?

4) Wie viel beträgt der Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser 4 Ruthen und 8 Schuh hält?

5) Wie viel beträgt der Umfang einer großen Kufe, (eines Bottichs) deren Durchmesser 8 Schuh, 5 Zoll hält?

L. Daß man durch das bisher von euch beobachtete Verfahren die Kreislinie im Längenmaße wirklich finden könne, kann ich euch durch eine sinnliche Wahrnehmung (durch den Augenschein) zwar nicht vollkommen bestätigen, aber doch sehr wahrscheinlich machen. Vollkommene Gewißheit geben hier nur die Gründe, die dem Verstande einleuchtend gemacht werden können. Erst sucht mir die Peripherie dieses Kreises (Fig. 30. Tab. V.), dessen Durchmesser 2′, 8″, also 28″ halten soll, indem die Länge a b = 4″ angenommen wird, im Längenmaße. K. (rechnen.)

$$
\begin{array}{r}
100 : 314 = 28 \\
28 \\
\hline
2512 \\
628 \\
\hline
100)\ 87|92\ )
\end{array}
$$

L. Die

L. Die Peripherie dieses Kreises beträgt also im Längenmaße 87 Zoll und noch $\frac{92}{100}$ eines Zolles oder: 87'', 9''', 2''''. Nun zählt einmahl alle die Sehnen die in diesem Kreise gezogen sind. K. (finden deren 22.)

L. Diese Sehnen sind alle von gleicher Länge, bis auf die mit a c bezeichnete, indem diese nur 3 Zoll und 3 Linien mißt *), während dem jede der andern gerade 4 Zoll hält oder gleich dem Theile a b vom Durchmesser ist. Jetzt rechnet aus, wie viel Zolle diese Sehnen zusammen genommen betragen. K. (sprechen:) 4 Mahl 21 Zoll machen 84, dazu noch 3 Zoll und 3 Linien giebt 87 Zoll und 3 Linien.

L. Zwischen den Puncten c und d sind 2 Linien, eine gerade und eine krumme. Welche von beyden muß die kürzere seyn? K. Die gerade.

L. So wie hier die Sehne c d kürzer als der dazu gehörige Bogen ist; so ist dieß der Fall bey einer jeden der übrigen Sehnen. Daher müssen nothwendig alle diese Bogen zusammen genommen, d. h. die ganze Kreislinie, länger seyn, als die Sehnen zusammen genommen. Da aber die Krümmung eines jeden einzelnen Bogens so unbedeutend ist, daß er fast mit seiner Sehne zusammenfällt: so kann auch keiner

 viel

*) Dieses Resultat habe ich wenigstens durch eine sehr sorgfältig angestellte Messung gefunden.

viel länger als die ihm zugehörige Sehne seyn. Und daher kommt der kleine Unterschied, der zwischen der ganzen Kreislinie und zwischen den Sehnen zusammen genommen Statt findet. Jene hat, wie ihr gefunden habt, 87″, 9‴, 2⁗, diese aber haben 87″, 2‴, so daß also der ganze Unterschied 7 Linien und 2 Scrupel beträgt. Die erstere dieser Zahlen kann nur durch Rechnung, die letztere aber durch unmittelbare genaue Messung gefunden werden. Da nun aber beyde so genau zusammen treffen, als sie dem Augenscheine nach zusammen treffen müssen; so macht dieser Umstand wahrscheinlich, (was andere Gründe zur Gewißheit erheben,) daß eine Kreislinie im Längenmaße durch das von uns angewandte Verfahren gefunden werden könne.

So wie wir aus dem gegebenen Durchmesser und mit Hülfe des Verhältnisses 100 : 314 alle Mahl den Umfang eines Kreises finden können; so können wir den Durchmesser finden, wenn uns der Umfang eines Kreises gegeben wäre, indem wir bey dem anzusetzenden Regeldetri-Exempel die erst erwähnten Verhältnißzahlen nur in umgekehrter Ordnung setzen dürfen. Wäre uns z. B. bekannt, daß irgend ein Kreis 60 Schuh im Umfange hätte, und sollten wir nun die Länge seines Durchmessers finden; so dürfen wir nur bey uns selbst denken: Ein Kreis von 314 Schuh im Umfange muß einen Durchmesser von 100 Schuh haben, wie viel muß demnach der Durchmesser eines Kreises von 60 Schuh im Umfange betragen? und das Exempel also ansetzen und rechnen:

```
314 — 100 — 60
             60
314 |6.0.0 0| 19
    |3 1 4.:|
    ---------
     2 8 6.0
     2 8 2 6
    ---------
     · · 3 4
```

d. h. der gesuchte Durchmesser müßte $19\frac{34}{314}$ Schuh lang seyn.

Man lasse auch dergleichen Exempel mehrere rechnen und die Kinder beym Ansetzen immer laut sprechen: Eine Peripherie von 314 Schuh ꝛc. erfordert (giebt) einen Durchmesser von 100 Schuh: wie lang muß demnach der Durchmesser eines Kreises seyn, der .... Schuh ꝛc. im Umfange hat? oder

314 : 100 = Per. : Diam.

Acht und Sechzigster Satz. a

Aufgabe.

L. Da ihr nunmehr im Stande seyd, den Umfang eines jeden Kreises zu finden, so könnt ihr auch die Größe einer Kreisfläche ausfindig machen, wenn ihr anders behalten habt, welcher Figur jeder Kreis an Größe gleich kommt. Wißt ihr dieß noch? K. Ja. Er ist gleich einem Dreyecke, welches ꝛc.

L. Wenn ihr nun ein Dreyeck verzeichnen wolltet, welches diesem Kreise hier (Fig. 28. T. IV.) an Größe gleich wäre, was müßtet ihr da vor allen Dingen thun? K. Wir müßten den Umfang des Kreises suchen, dann eine gerade Linie, die diesem Umfange gleich wäre, verzeichnen, und darüber ein Dreyeck, dessen Höhe dem Halbmesser c d gleich käme, beschreiben.

L. Und was wäre zu thun, wenn ihr den Flächeninhalt dieses Dreyecks finden wolltet? K. Dann müßten wir die Grundlinie mit der Höhe multipliciren und das Product mit 2 dividiren.

L. Gut! Dieses Dreyecks (Fig. 29. T. IV.) Grundlinie ist gleich der Peripherie und seine Höhe dem Halbmesser dieses Kreises (Fig. 28.), beyde Figuren sind also von gleicher Größe, und wer den Inhalt des Dreyecks (Fig. 29.) findet, der erfährt auch den Inhalt — ? K. Der Kreisfläche A.

L. Nun sagt mir, ob die Producte übereinstimmen müssen oder nicht, wenn ihr erstlich die Peripherie mit dem Halbmesser hier (Fig. 28.), dann aber die Grundlinie dieses Dreyecks (Fig. 29.) mit seiner Höhe (CD) multiplicirt. K. Da müssen sie freylich übereinstimmen.

L. Warum? K. Weil ja in beyden Fällen einerley Zahlen (Factoren) mit einander multiplicirt werden, indem des Dreyecks Grundlinie der Peripherie, und seine Höhe dem Halbmesser dieses Kreises gleich ist.

L. Wenn

L. Wenn die ganzen Producte gleich sind, so müssen auch ihre Hälften —? K. Einander gleich seyn.

L. Wenn ich also die Peripherie dieses Kreises mit seinem Halbmesser multiplicirte und das Product halbirte; so wäre es eben so viel, als wenn ich die Grundlinie und die Höhe dieses Dreyecks (Fig. 29.) mit einander multiplicirte und dann das Propuct halbte. Nun sagt, ob es wohl nöthig wäre, dieses Dreyeck (Fig. 29.) noch neben diesen Kreis (Fig. 28.) wirklich zu verzeichnen, wenn ich seinen (des Dreyecks) Flächeninhalt finden wollte? K. Nein.

L. Wie könnte ich aber diesen, auch ohne dieses Dreyeck zu verzeichnen, finden? K. Wenn Sie die Peripherie und den Halbmesser dieses Kreises mit einander multiplicirten und das Product halbten (mit 2 dividirten).

L. Auf diese Weise fände ich freylich den Flächeninhalt dieses Dreyecks (auf Fig. 29. zeigend), ohne es selbst verzeichnet zu haben: zugleich aber fände ich auch den Inhalt — ? K. Der Kreisfläche A (Fig. 28.).

L. Gut! Nun seyd ihr gewiß im Stande, mir zu sagen, wie man den Inhalt einer Kreisfläche finden kann. Wer sagt mir dieß? K. Wenn man die Peripherie mit dem Halbmesser multiplicirt und das Product mit 2 dividirt.

L. Richtig! Denn indem man dieses thut, thut man im Grunde nichts anders, als was man

 thun

thun müßte, wenn man ein dem gegebenen Kreise gleiches Dreyeck ausrechnen wollte. Kurz, man betrachtet den Kreis als ein Dreyeck, dessen Grundlinie die Peripherie und dessen Höhe der Halbmesser ist, und findet daher seinen Flächeninhalt gerade so, wie den eines jeden Dreyecks *). — Jetzt

*) Wenn man z. B. die beyden Factoren 4 und 6 mit einander multiplicirt und das Product mit 2 dividirt; so findet man eben so wohl die Zahl 12, als wenn man von einem der beyden Factoren die Hälfte nimmt und damit den andern multiplicirt. Dieß sage man den Kindern und zeige ihnen, daß es einerley sey, ob man die Peripherie mit dem halben Halbmesser, d. h. mit dem 4ten Theil des Durchmessers multiplicirt, oder Peripherie und Halbmesser mit einander multiplicirt und das Product mit 2 dividirt. In beyden Fällen findet man den Inhalt der Kreisfläche.

Will man die Kinder hier noch mit einem Satz ohne Beweis (der hier nur durch Hülfe der Buchstabenrechnung geführt werden kann,) bekannt machen; so kann man auch sagen: der Flächeninhalt eines Kreises wird gefunden, wenn man 314 mit der Quadratzahl des Halbmessers multiplicirt und das Product mit 100 dividirt. Hätte z. B. der Durchmesser eines Kreises 8 Schuh, so wäre der Halbmesser = 4′, folglich die Quadratzahl desselben = 16. Dieß gäbe folgende Rechnung:

	314	(sogenannte Ludolphische Zahl)
	16	(Quadratzahl des Halbmessers)
	1884	
	314	
100)	50|24	(Product mit 100 dividirt)

d. h.

Jetzt wollen wir uns ein bischen im Ausrechnen der Flächen gegebener Kreise üben. Wie groß ist die Fläche eines Kreises, dessen Durchmesser 2 Zoll und 5 Linien hält. K. (machen die Zolle zu Linien und suchen erst die Peripherie, indem sie ansetzen:

Linien im Durchmesser		Linien in der Peripherie		Linien im Durchmesser
100	—	314	—	25 ?

```
        314
         25
       ----
       1570
       628
       ----
100)   78|50
```


d. h. der Flächeninhalt des gegebenen Kreises betrüge

50□', 24□''

Das nämliche Resultat wird durch das oben angegebene Verfahren also gefunden:

```
100 — 314 — 8'
        8
     -----
100)  25|12
```

d. h. Periph. = 25', 1'', 2''' oder 2512'''

```
          2512''' Periph.
           200''' ½ des Diameters
     ----------------
Flächeninh. 502400 □''' = 50□', 24□''.
```

d. h. die Peripherie des gegebenen Kreises enthält

$78\frac{5}{100}$ Linien = 7 Zoll, 8 Linien, 5 Scrupel.

Nun wird die Peripherie, die in Scrupeln ausgedrückt werden muß, mit dem Halbmesser = 125 Scrupel multiplicirt und das Product gehalbt, wie folgt

```
          785'''' Per.
          125'''' Halbm.
        -------
         3925
        1570
        785
   -----------------
   2)   98125| 49062½
        8::::
        ----
        18:::
        ----
         10:
        -----
            5
            4
            -
            1
```

Inhalt des Kreises 49062½ □'''' d. i.

4 □'' 90 □''' 62½ □''''

L. Wie groß ist die Fläche eines Kreises welcher 12 Schuh und 8 Zoll im Durchmesser hält?

Rech-

Rechnung:

Zoll im Durchm.		Zoll in der Per.		Zoll im Durchm.
100	—	314	—	128 ?

```
        314
        128
      -----
       2512
       628
       314
      -----
100)  401|92
```

D. h. Per. $= 401\frac{92}{100}$ Zoll $= 40', 1'', 9''', 2''''$

Diese Per. in Scrupeln ausgedrückt $= 40192''''$

Der Halbmesser in Scrup. — $= 6400''''$

```
  16076800
  241142
 ---------
 257218800
```

Dieses Product mit 2 dividirt giebt

$128609400 \square'''' =$

2 Quadratruthen, 28 Quadratschuh, 60 Quadratzoll, 94 Quadratlinien Fläche des Kreises.

Wie groß ist die Fläche eines Kreises, welcher 3 Ruthen im Durchmesser hat?

Rechnung:

$100 : 314 = 3° : \text{Per.}$

```
        3
      -----
100)  9|42| d. i. Per. = 9°, 4', 2''
      942''  Periph.
      150''  Halbm.
      -----
      47100
      942
      -----
     141300.
```

141300. Dieses Prod. mit 2 dividirt giebt

giebt 70650 □″ = 7 □°, 6 □′, 50 □″ als den Inhalt der Kreisfläche.

Dergleichen Exempel werden mehrere gerechnet. Man wird wohl thun, wenn man den Kindern mit unter bestimmte (auf der schwarzen Tafel gezogene) Kreise zum ausrechnen vorlegt, deren Durchmesser eine gewisse Anzahl der landüblichen Zolle oder Schuhe hält und dann ein Quadrat verzeichnet, oder verzeichnen läßt, welches dem ausgerechneten Kreise gleich ist. Dieß letztere geschieht, wenn man den gegebenen Kreis (er heiße A B C Fig. 31.) in einen Triangel (A B C Fig. 32.), diesen in ein gleich großes Rectangulum (E B D C Fig. 32.), und dieses wieder in ein, auf die S. 224. der erst. H. angegebene Art, gleich großes Quadrat (Fig. 33.) verwandelt. Nach dieser Verwandlung kann man den quadrirten Kreis, wie die 34ste Figur zeigt, aus dem Mittelpuncte des Quadrates, worein er verwandelt ist, beschreiben und den Kindern sagen, daß die Ecken des Quadrates, die außerhalb des Kreises liegen, so viel betragen, als die Kreisabschnitte, die außerhalb des Quadrates liegen. Auch zeige man hier den Kindern, wie man im gemeinen Leben von der in Rede stehenden Aufgabe Anwendung machen kann. Es soll z. B. ein kreisförmiger Garten-Sallon mit Backsteinen gepflastert und ein Ueberschlag gemacht werden, wie viel Backsteine dazu nöthig seyn mögen. Um diesen Anschlag zu fertigen muß 1) der Flächeninhalt des zu pflasternden Platzes, 2) der Flächeninhalt der größern Seite eines sogenannten Backsteines auf die gehörige Weise gesucht und dann durch die Division gefunden werden, wie oft die erwähnte Fläche eines Backsteins in dem Flächenraum des Sallons enthalten ist. Hätte z. B. der Sallon 8 Schuh

in

im Durchmesser, so betrüge sein Flächenraum 50 Quadratschuh, 24 Quadratzoll = 5024 Quadratzoll. Hätte nun eine der größern Flächen eines Backsteins 66 Quadratzoll, so urtheilt man: so oft 66 Quadratzoll in 5024 Quadratzollen enthalten sind, so oft braucht man einen Backstein. Da nun $\frac{5024}{66} = 76\frac{4}{33}$; so wären $76\frac{4}{33}$ Backsteine nöthig. Natürlich braucht man in der Wirklichkeit deren mehr, weil durch das Abrunden derer, die an die Peripherie zu liegen kommen, manche Stücke verloren gehen, man erfährt aber doch durch diese Rechnung ungefähr, wie viel man Backsteine braucht. Man kann hier noch folgende und ähnliche Fragen vorlegen: 1) Eine kreisförmige Fläche von 9 Zoll im Diam. soll vergoldet werdeu mit Goldblättchen, wovon jedes 4 Quadratzoll hält: wie viel solcher Goldblättchen braucht man? 2) Eine kreisförmige Fläche, die 12 Schuh im Durchmesser hat, ist gepflastert worden und dem Pflasterer ist 1 fl. Lohn für die Quadratruthe gesetzt: wie viel muß hier Lohn bezahlt werden? 3) Ein kreisförmiger Platz, der 2 Ruthen und 6 Schuh im Durchmesser hat, soll mit guter Erde überfahren werden, und mit jedem Fuder kann man 6 Quadratschuhe bedecken: wie viel Fuder Erde braucht man zu diesem Platze?

Für Lehrer, welche allenfalls ihren Schülern hier auch zeigen wollen, wie man den Inhalt eines Kreisaus- und Kreisabschnittes findet, setze ich die Auflösung beyder Aufgaben hieher.

1) Den Inhalt eines Kreisausschnittes zu finden.

Aufl. Man messe den Halbmesser CB = CA (Fig. 20. b. Tab. III.) und suche aus ihm durch Hülfe des

des Verhältnisses 100 : 314 die halbe Peripherie des Kreises ABF, indem man schließt: wie sich verhält 100 : 314 so muß sich der Halbmesser zur halben Peripherie verhalten, da die Hälften sich eben so, wie ihre Ganzen zu einander verhalten. Wäre nun der Halbmesser CB = 18 Schuh, so sähe die Rechnung also aus:

$$100 : 314 = 18' : \tfrac{1}{2}\ \text{Per.}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \hline 2512 \\ 314 \\ \hline 100)\ 5652 \mid 56\tfrac{52}{100}' = 56',\ 5'',\ 2''' \end{array}$$

d. h. die gesuchte halbe Peripherie betrüge 56 Schuh, 5 Zoll, 2 Linien.

Jetzt messe man den Winkel C mit dem Transporteur, um dadurch die Zahl der Grade des Bogens ADB zu erfahren. Denn so viel Grade der Winkel C hat, so viel Grade hat auch der genannte Bogen. Ist diese Messung vollendet, und dadurch bekannt geworden, wie viel Grade dieser Bogen hält, so erforsche man, wie viel er im Längenmaße beträgt. Um dieß heraus zu bringen, schließt man: wie sich verhält die halbe Peripherie in Graden zu dem Bogen ADB in Graden, so verhält sich die halbe Peripherie im Längenmaße zu dem Bogen ADB im Längenmaße. Hätte nun der Bogen ADB 80 Grad, so würde, da die halbe Peripherie 180 Grad hat und diese im vorliegenden Falle = 5652 Linien wäre, folgende Rechnung entstehen:

$$180^\circ : 80^\circ = 5652''' : ADB.$$

```
                 80
         ─────────────────
    18φ)  45216φ | 2512'''
          36:::
          ─────
          ·92::
           90::
          ─────
           ·21:
            18:
          ─────
             36
             36
          ─────
             ··
```

D. h. der Bogen A D B hält im Längenmaße 2512 Linien.

Jetzt betrachtet man den Kreisausschnitt A B C als einen Triangel, dessen Grundlinie $= 2512'''$, dessen Höhe $HC = CB$ aber $= 18''$ oder $1800'''$ hält, und sucht seinen Inhalt, indem man die Grundlinie mit der Höhe mutiplicirt und das Product mit 2 dividirt, oder, was eben so viel ist, indem man die Grundlinie mit der halben Höhe multiplicirt, welches folgende Rechnung giebt:

$$\begin{array}{r} 2512''' \\ 900''' \\ \hline 2260800 \,\square''' = 2 \,\square^\circ,\ 26 \,\square',\ 08 \,\square'' \end{array}$$

D. h. der Kreisausschnitt A C B D hält unter den angenommenen Bedingungen 2 Quadratschuh, 26 Quadratzoll und 8 Quadratlinien.

1) Den

2) Den Flächeninhalt des Kreisabschnittes A D B A (Fig. 20. b. Tab. III.) zu finden.

Aufl. Man ziehe von den Puncten A und B die Halbmesser A C und B C, suche 1) auf die vorher angegebene Art den Inhalt des Kreisausschnittes A D B C. 2) Den Inhalt des Dreyecks C A B, dessen Höhe = E C ist, und ziehe dann den Inhalt des letztern vom Inhalte des erstern ab. Der Rest giebt sodann den Inhalt des Abschnittes A D B A an.

Acht und sechzigster Satz. b.

Aufgabe.

L. Verzeichnet jetzt einen Kreis mit beliebigem Halbmesser. — Nun verzeichnet aus dem nämlichen Mittelpunkte mit etwas größerm Halbmesser einen zweyten Kreis. K. (haben (Fig. 34. b. T. V.) verzeichnet.

L. Jetzt sagt mir, welchem von diesen beyden Kreisen der Mittelpunct C zugehört. K. Er gehört beyden zu.

L., (welcher 2 Kreise, die einander schneiden, verzeichnet hat) Haben denn diese beyden Kreise auch einen gemeinschaftlichen Mittelpunct? K. Nein.

L. Da befindet sich also an diesen beyden Kreisen (Fig. 34. b. T. V.) ein Merkmahl, welches sich an diesen hier (die einander schneiden) nicht befindet. Was ist dieses für eins? K. Diese (Fig.

(Fig. 34. b.) haben einen gemeinschaftlichen Mittelpunct, diese andern beyden aber nicht.

L. Um des Merkmahls willen, welches ihr von diesen zwey Kreisen (Fig. 34. b) jetzt angegeben habt, nennt man sie (diese Kreise) concentrische Kreise. Könnt ihr mir wohl jetzt sagen, was man unter concentrischen Kreisen versteht? K. Solche Kreise, die einen gemeinschaftlichen Mittelpunct haben (aus einem gemeinschaftlichen Mittelpuncte beschrieben sind).

L. Wer zeigt mir wohl jetzt einen Flächenraum, der zwischen zwey concentrischen Kreislinien gelegen ist? K. (zeigen den Raum a b c).

L. Jetzt habt ihr mir den Ring gezeigt. Merkt ihr wohl, was das Wort Ring hier bedeutet? K. Ja. Es bedeutet den Flächenraum, welcher zwischen zwey concentrischen Kreislinien liegt.

L. Gut! Nun sollt ihr lernen, wie man den Flächeninhalt des Ringes findet. Der Bequemlichkeit wegen wollen wir den größern dieser Kreise (Fig. 34. b) A, den kleinern B nennen. Der Kreis A besteht aus zwey Theilen, nennt mir sie. K. Der Ring und der Kreis B.

L. Recht! Wenn ich nun von dem Kreise A den Kreis B wegnehme, was bleibt übrig? K. Der Ring a b c.

L. Gesetzt, der Kreis B hielte 4, der Kreis A aber 12 Quadratschuh, wie viel Quadratschuhe müßte der Ring a b c halten? K. 8.

L. Recht! Nun könnt ihr mir vielleicht sagen, wie man den Inhalt des Ringes findet. Wer sagt mir dieß? K. Wenn man den Inhalt des kleinern Kreises von dem Inhalte des größern abzieht.

L. Kann man aber diese Subtraction vornehmen, wenn man den Inhalt beyder Kreise noch nicht weiß? K. Nein.

L. Was ist also vor allen Dingen zu thun, wenn man den Inhalt des Ringes finden will? K. Man muß den Inhalt beyder Kreise suchen.

L. Und dann? K. Muß man den Inhalt des kleinern ꝛc.

L. Hier sind zwey concentrische Kreise, wovon der kleinere einen 2 Schuh, der größere einen 3 Schuh langen Halbmesser hat. Sucht jetzt den Inhalt des Ringes. — —

Vierter Abschnitt.

Von der Aehnlichkeit der Figuren.

Vorbereitung.*)

L. Ich habe hier 4 Streifen von Pappe**), die uns jetzt die Stelle von Linien vertreten sollen, weswegen wir auch nur auf ihre Länge, aber weder auf ihre Dicke, noch auf ihre Breite sehen. Sie sind von verschiedener Länge, jedoch so beschaffen, daß man aus ihnen eine (geometrische) Proportion***) bilden kann. Es verhält sich nämlich A : B = C : D. Was das mit andern Worten heißt, könnt ihr mir sagen. K. A ist in B so oft enthalten, als C in D.

L. Gut! Wie oft ist denn C in D enthalten? Ihr könnt dieß leicht sehen, wenn ihr nur auf die Anzahl der Zolle Achtung gebt, die auf jedem dieser Streifen bemerkt sind. K. $1\frac{1}{2}$ Mahl.

L. Richtig! Denn C ist 4, D aber 6 Zoll lang. Wie oft muß nun A in B enthalten seyn? K. Auch $1\frac{1}{2}$ Mahl.

*) Bey Kindern, denen die Lehre von den Proportionen geläufig ist, ist natürlich diese Vorbereitung nicht nöthig.

**) Der erste = 2 Zoll heißt A; der zweyte = 3 Zoll heißt B; der dritte = 4 Zoll heißt C; und der vierte = 6 Zoll heißt D. Die Zolle sind wie auf einem Maßstabe durch Querstriche angegeben.

***) Die Begriffe, Verhältniß und Proportion, setze ich als bekannt voraus.

L. Wie lang muß denn da B seyn, da A 2 Zoll lang ist? K. Ein Mahl 2 und ein halb Mahl 2, d. i. 3 Zoll.

L. Und so ist es auch, wie ihr hier seht. Nun merkt, daß man die Glieder einer Proportion auf mancherley Art versetzen, (in mancherley Stellungen bringen) kann, ohne dadurch die Gleichheit der zwey Verhältnisse (die Proportion) aufzuheben. Wir wollen einmahl einige solche Versetzungen der einzelnen Glieder vornehmen. Macht erstlich das zweyte Glied zum ersten, und das vierte zum dritten. K. (thun dieß.)

L. Wer sagt mir geschwind, was ihr jetzt gethan habt? K. Wir haben das zweyte Glied dieser (einer) Proportion 2c.

L. Das heißt, ihr habt jedes der zwey gleichen Verhältnisse umgewendet. Nun wollen wir sehen, ob wir durch Umwendung der Verhältnisse wieder eine Proportion oder zwey gleiche Verhältnisse bekommen haben. Der erste Streifen (B) hält 3, der zweyte (A) 2 Zoll. Wie oft ist demnach B in A enthalten? K. Zwey drittel Mahl.

L. Und wie oft ist D in E enthalten? K. Auch zwey drittel Mahl.

L. Da haben wir ja zwey gleiche Verhältnisse! Wir können demnach sprechen: B verhält sich —? K. zu A, wie D zu C.

L. Wenn ich nun in der Folge sagen werde: wendet jedes Verhältniß dieser Proportion um, was habt ihr da zu thun? K. Da müssen wir das

zweyte

zweyte Glied zum ersten, und das vierte zum dritten machen.

L. Und da dadurch abermahls eine Proportion entsteht, so können wir sprechen: das zweyte Glied einer Proportion verhält sich zum ersten, wie das vierte zum dritten. Wir wollen jetzt die vorige Proportion A : B = C : D wieder herstellen und dann die zwey mittlern Glieder verwechseln, so daß das zweyte das dritte, und dieses das 2te wird. K. (machen die Proportion A : C = B : D.)

L. Haben wir wohl jetzt auch noch eine Proportion? K. Allerdings.

L. Wie wollt ihr mir dieses beweisen? K. A ist in C zwey Mahl und B in D auch so oft enthalten, folglich haben wir hier zwey gleiche Verhältnisse oder eine Proportion.

L. Könnt ihr mir jetzt sagen, was wir mit der vorigen (A : B = C : D) für eine Veränderung vornehmen mußten, um diese zu erhalten? K. Ja. Wir mußten die beyden mittlern Glieder mit einander verwechseln, d. h. wir mußten das zweyte zum dritten und das dritte zum zweyten machen.

L. Diese Verwechselung der beyden mittlern Glieder kann bey jeder Proportion Statt finden, ohne daß dadurch die Gleichheit der zwey Verhältnisse gestöhrt würde, und man kann daher sagen: in einer Proportion verhält sich das erste Glied zum dritten, wie das zwey-

te zum vierten. Wir werden in der Folge Gelegenheit finden, durch Verwechselung der beyden mittlern Glieder einer Proportion eine neue zu bilden. — Wir haben also hier vor uns die Proportion A : C = B : D. Der Streifen A hält 2, und der Streifen C 4 Zoll. Wie groß muß daher die Summe des ersten und zweyten Gliedes hier seyn? K. 6.

L. Jetzt sucht mir auch die Summe des dritten und vierten Gliedes. K. Diese ist 9.

L. Gut! Ich lege hier den Streifen C an A, wodurch ich 6, und den Streifen D an B, wodurch ich 9 Zoll erhalte. Jetzt vergleicht einmahl die Summe des ersten und zweyten Gliedes, also 6 Zoll, mit dem zweyten Gliede, also mit vier Zoll und sagt mir, wie oft diese Summe im zweyten Gliede enthalten ist. K. Zwey drittel Mahl.

L. Und wie oft ist denn die Summe des dritten und vierten Gliedes, 9 Zoll nämlich, im vierten Gliede, also in 6 Zollen enthalten? K. Auch zwey drittel Mahl.

L. Da verhält sich also in dieser Proportion die Summe des ersten und zweyten Gliedes zu dem zweyten Gliede, wie — ? K. Die Summe des dritten und vierten Gliedes zum vierten Gliede.

L. Was wir jetzt bey dieser Proportion bemerkt haben, das ist bey einer jeden andern der Fall. Daher können wir überhaupt sprechen: Die Summe des ersten und zweyten Gliedes einer Proportion verhält sich zum zweiten Gliede, wie die Sum-

Summe des dritten und vierten Gliedes zum vierten Gliede.*) Ich will diesen Satz noch mit Einem Beyspiele bestätigen. Hier ist die Proportion 5 : 10 = 8 : 16. Die Summe der beyden ersten Glieder ist 15, und die der beyden letzten 24. Nun verhält sich aber 15 : 10 = 24 : 16. Ihr habt nun gesehen, daß diese Pappstreifen von der Beschaffenheit sind, daß sich Proportionen daraus bilden lassen, und deshalb sagt man: diese Streifen, oder, da sie Linien vorstellen sollen, diese Linien sind proportionirt. Ob diese vier Streifen (Statt des Streifens C = 2 Zoll einen andern, der 5 Zoll lang ist, zu den übrigen dreyen legend) auch proportionirt sind, das untersucht einmahl. K. (untersuchen und finden, daß sie aus den genannten Größen keine Proportion bilden können.)

L. Nun! wie meynt ihr? sind diese vier Größen proportionirt oder nicht? K. Sie sind es nicht.

L. Warum sagt ihr, daß sie es nicht seyen? K. Weil sich keine Proportion aus ihnen bilden läßt.

 L. Wenn

*) Sollte manchen Kindern dieser Satz noch nicht recht einleuchtend seyn, so lege man C an A in Eine Linie und daneben noch einen Papierstreifen = C; und D an B und daneben auch wieder einen Papierstreifen = D und spreche: die Summe des ersten und zweyten Gliedes (auf A und C zeigend) verhält sich zum zweyten Gliede (auf den Stellvertreter von C zeigend) wie ꝛc.

L. Wenn könnte man sie nur proportionirt nennen? K. Wenn sie so beschaffen wären, daß sich aus ihnen Proportionen bilden ließen.

L. Nun hoffe ich, daß ihr mich verstehen werdet, wenn ich in der Folge von Linien, die proportionirt sind, sprechen werde.

Neun und sechzigster Satz.

Lehrsatz.

L. Hier (Fig. 35. Tab. VI.) habe ich das Dreyeck ABC, und mit einer seiner Seiten, nämlich mit AC, eine Linie parallel gezogen, welche die übrigen beyden Seiten schneidet, wodurch wir gewisse Puncte bekommen haben, die wir durch gerade Linien mit andern verbinden können. Was das für Puncte sind, die jetzt verbunden werden können, das sagt ihr mir. K. Die Puncte A, C, D und E.

L. Verbindet einmahl je 2 und 2 dieser Puncte durch gerade Linien. K. (ziehen die CD und die AE.

L. Daß wir jetzt verschiedene neue Dreyecke bekommen haben, seht ihr. Wir wollen unsere Aufmerksamkeit auf die mit EDC und EDA bezeichneten richten. Wenn wir uns diese Figur herum gedreht vorstellen, so, daß die Linie DE unterhalb der AC zu liegen kommt und die

Grund-

Grundlinie wird *), so bekommen wir eine Zeichnung, die wir schon einmahl gehabt haben, weswegen ihr mir gleich werdet sagen können, wie sich die Dreyecke EDC und EDA zu einander verhalten. K. Diese müssen einander gleich seyn.

L. Und welches ist der Grund dieser eurer Behauptung? K. Weil beyde Dreyecke einerley Grundlinie und Höhe haben.

L. Gut! Ehe wir in unserer Untersuchung weiter gehen, merkt hier einen Satz, den ich der Kürze wegen nur im Vorbeygehen und ohne Beweis anführen will. Einerley Größe hat zu zwey gleichen Größen einerley Verhältniß. Dieser Pappstreifen z. B., welcher 6 Zoll lang ist, hat zu diesen beyden Linien hier (dergleichen verzeichnend), die einander gleich sind, einerley Verhältniß. Denn er ist in der ersten Linie da eben so wohl 3 ꝛc. Mahl, als in der zweyten hier enthalten, und ich kann daher sprechen: B (der vorgelegte Pappstreifen) verhält sich zu AC (der ersten Linie) wie B zu BD (der zweyten Linie) oder B : AC = B : BD. Oder, um in Zahlen ein Beyspiel zu geben, 3 : 15 = 3 : 10 + 5, indem 15 und 10 + 5 gleiche Größen sind. Nun wollen wir wieder zu unserer Figur zurückkehren, und auf die Verhältnisse △ BDE : △ EDC

F 5 und

*) Bey den meisten Kindern ist es nöthig, daß man diese Figur wirklich herumdrehe, daher ist es gut, wenn man sie auch auf ein Blatt Papier verzeichnet und an die schwarze Tafel heftet.

und △ BDE und △ EDA unsere Aufmerksamkeit richten. Wir haben nämlich hier, wie ihr seht, zwey Verhältnisse

1) △ BDE : △ EDC

2) △ BDE : △ EDA.

Ob nun diese zwey Verhältnisse einander gleich sind, ich meyne, ob sich verhält BDE : EDC = BDE : EDA, oder nicht, das möchte ich von euch hören. K. Beyde Verhältnisse sind freylich einander gleich.

L. Wie lautet der Satz, womit ihr mir dieß beweisen wollt? K. Einerley Größe hat zu zwey gleichen Größen ꝛc.

L. Gut! Gesetzt also, der Triangel BDE hielte den Triangel DEA zwey Mahl in sich, wie oft müßte er denn den Triangel DEC in sich enthalten? K. Auch zwey Mahl.

L. Richtig! Wir dürfen also folgende Proportion hieher schreiben:

△ BDE : △ EDA = △ BDE : DEC.

L, (welcher die 35ste Figur so herum gedreht hat, daß sie auf der Linie AB steht.) Jetzt seht einmahl die zwey Dreyecke EBD und EDA an, und sagt mir, ob sie gleiche oder verschiedene Höhen haben. K. Sie haben gleiche Höhen, weil beyder oberste Spitzen in einem Puncte (in E) zusammen treffen.

L. Wie verhalten sich denn wohl Dreyecke von gleicher Höhe? K. Wie ihre Grundlinien.

L. Da können wir abermahls eine Proportion anschreiben, nämllich:

△ EBD : △ EDA = BD : DA.

Jetzt will ich unsere Figur (Fig. 35.) wieder auf eine andere Seite, nämlich auf BC stellen, damit euch die Sache desto deutlicher werden möge. — Nun sagt mir, wie sich die Höhe des Triangels DBE zur Höhe des Triangels DEC verhält. K. Beyder Höhen sind einander gleich, weil ihre Spitzen auch in Einem Puncte zusammen treffen.

L. Wie müssen sich daher diese zwey Dreyecke zu einander verhalten? K. Wie ihre Grundlinien.

L. Da können wir wiederum eine Proportion anschreiben. Wer thut dieses? K. (schreiben an:

△ DBC : △ DEC = BE : EC.

L. Wir haben jetzt herausgebracht, daß das Verhältniß BD : DA gleich ist dem Verhältnisse EBD : EDA, und BE : EC gleich ist dem Verhältnisse EBD : DEC. Und von den Verhältnissen EBD : EDA und EBD : DEC wissen wir, daß sie einander gleich sind. Nun will ich den Obersatz zu einem Schluße sagen und sehen, ob ihr den Unter- und Schlußsatz finden könnt. Verhältnisse, welche gleichen Verhältnissen gleich sind, sind unter sich gleich. K. Die Verhältnisse BD : DA und BE : EC sind gleichen

Ver-

Verhältnissen gleich, folglich sind sie auch unter sich gleich.

L. Gut! Wir können also anschreiben: BD : DA = BE : EC. Jetzt könnt ihr mir sagen, ob die vier Stücke, worein die zwey Seiten dieses Dreyecks durch die Linie DE zerlegt werden, proportionirt sind, oder nicht. K. Sie sind es.

L. Was heißt das mit andern Worten? K. Man kann aus ihnen eine Proportion bilden.

L. Könnt ihr mir nun wohl sagen, wie man es machen muß, wenn man zwey Seiten eines Dreyecks durch eine Linie proportionirt schneiden will? K. Ja. Man muß mit einer Seite des Dreyecks eine Linie parallel ziehen, welche die andern zwey Seiten schneidet.

L. Richtig! Wie müßt ihr euch denn ausdrücken, wenn ihr jemanden den ganzen Lehrsatz, den wir jetzt gefunden haben, bekannt machen wollt? K. Wenn man in einem Dreyecke eine Linie mit einer Seite desselben parallel zieht, und sie bis an die andern zwey Seiten verlängert; so werden dadurch diese zwey Seiten proportionirt geschnitten.

L. Wer getraut sich wohl diesen Satz zu beweisen und die nöthige Verzeichnung dazu zu machen? K. (versuchen, den vorhin geführten Beweis zu wiederhohlen.)

L. Jetzt will ich euch zeigen, daß die Erfahrung unsern jetzt erwiesenen Lehrsatz bestätigt. Die

Seite BA (Fig. 35.) habe ich in 6, und die Seite BC in 9 gleiche Theile getheilt, und durch die Puncte D und E eine Linie mit AC parallel gezogen, wodurch wir vier Linien nämlich AD, DB, CE und EB bekommen haben. Nun ist, wie ihr seht, enthalten

BD in DA $\frac{1}{2}$ Mahl
BE in EC $\frac{1}{2}$ Mahl
folglich BD : DA = BE : EC oder
4 : 2 = 6 : 3

Sollten, was gewöhnlich der Fall ist, die Kinder die Kette der in diesem Beweise vorkommenden Schlüße in ihrem Zusammenhange nicht übersehen können, so begnüge man sich vor der Hand, ihnen den in Rede stehenden Lehrsatz etwa auf folgende Art bekannt zu machen.

L., (welcher Fig. 35. ohne die EA und CD verzeichnet hat.) Was führt denn die Figur ABC für einen Namen? K. Dreyeck.

L. Und was ist in diesem Dreyecke noch gezogen oder verzeichnet? K. Eine gerade Linie.

L. Scheint euch diese Linie (DE) mit keiner Seite des Dreyecks ABC parallel zu laufen? K. Ja, mit der AC.

L. Mit dieser habe ich sie auch wirklich parallel gezogen, und zwar habe ich sie so lang gemacht, daß sie die übrigen beyden Seiten schneidet. Jetzt sagt mir, wie ihr euch ausdrücken müßt, wenn ihr einem Andern den Auftrag geben wollt,

eine Figur, wie diese hier (Fig. 35.) zu verzeichnen. K. Da müssen wir sprechen: verzeichne ein Dreyeck und ziehe innerhalb desselben mit einer Seite eine Linie parallel, welche die übrigen beyden Seiten schneidet.

L. Gut! Jetzt will ich die zwey geschnittenen Seiten BA und BC in lauter gleiche Theile eintheilen, damit wir die abgeschnittenen Stücke bequem mit einander vergleichen und ihre Verhältnisse finden können. — So! Nun sagt, wie viel Zoll — so wollen wir die Theile Ba, ac etc. nennen — das Stück BD hält. K. Vier.

L. Und das Stück DA? K. Zwey.

L. Wie oft ist nun BD in DA enthalten? K. Ein halb Mahl.

L. Vergleicht nun die Stücke BE und EC mit einander und sagt mir, wie oft das erstere im letztern enthalten ist. K. Auch ein halb Mahl.

L. Da haben wir hier sonach zwey gleiche Verhältnisse oder eine Proportion. Wer schreibt mir sie an? K. (schreiben an: BD : DA = BE : EC.)

L. Jetzt könnt ihr mir sagen, ob die 2 Seiten dieses Dreyecks durch die Linie DE proportionirt geschnitten worden sind oder nicht. K. Sie sind proportionirt geschnitten worden.

L. Das heißt? K. Sie sind so geschnitten worden, daß sich aus ihren Theilen eine (geometrische) Proportion bilden läßt.

L. Nun

L. Nun merkt! Was bey diesem vorliegenden Dreyecke erfolgte, als ich innerhalb desselben mit Seite eine Linie parallel zog, die die übrigen zwey Seiten schnitt, das muß bey jeder Figur dieses Namens erfolgen, wenn man das nämliche thut. In jedem Dreyecke nämlich schneidet eine Linie, die innerhalb desselben mit einer Seite parallel gezogen wird, die übrigen beyden Seiten proportionirt, welches auch diese Figuren hier (Fig. 36 u. 37) noch bestätigen.

L. Wir haben also hier (Fig. 35.) die Proportion B DD : A = BE : E C. Nun wendet einmahl jedes Verhältniß um, und sagt, wie denn die Proportion lautet. K. D A : B D = E C : B E.

L. Seht, ob dieß in der Zeichnung hier (Fig. 35.) zutrifft, ob nämlich D A in B D eben so oft enthalten ist, als E C in B E. K. Ja, das trifft zu. Denn D A ist in B D, und E C in B E zwey Mahl enthalten.

L. Jetzt macht aus der Proportion B D : D A = B E : E C dadurch eine neue, daß ihr die beyden mittlern Glieder mit einander verwechselt. K. (schreiben an: B D : B E = D A : E C)

L. Seht, ob auch dieß in unsrer Zeichnung zutrifft. K. Es trifft zu; denn B D ist B E $1\frac{1}{2}$ Mahl und D A in E C auch $1\frac{1}{2}$ Mahl enthalten.

L. Nun

L. Nun wollen wir aus der Proportion BD : DA = BE : EC abermahls eine neue und zwar dadurch bilden, daß wir die Summe des ersten und zweyten Gliedes zum ersten und die Summe des dritten und vierten Gliedes zum dritten Gliede machen. Diese Proportion sieht so aus:

$$BD + DA : DA = BE + EC : EC$$

und wird ausgesprochen — ? K. B D plus D A etc.

L. Nun sagt, wie viel Zolle die B D und D A in unserer Zeichnung hier (Fig. 35.) zusammen genommen halten. K. Sechs.

L. Die ganze Seite B A hält also 6 Zoll und das Stück D A? K. Hält deren zwey.

L. Da ist also die ganze Seite B A in dem Theile D A enthalten — ? K. Ein drittel Mahl.

L. Nun seht doch, wie oft die BE + EC d. h. die ganze Seite BC in dem Stücke E C enthalten ist. K. Die Seite B C hält 9, das Stück E C 3 Zoll, also ist B C in E C auch nur ein drittel Mahl enthalten.

L. Jetzt macht aus der erst angeschriebenen Proportion wieder eine neue dadurch, daß ihr die beyden mittlern Glieder mit einander verwechselt.

K. (schreiben an: $BD + DA : BE + EC = DA : EC$.)

L. Wir wollen sehen, ob dieß an unserer Zeichnung auch zutrifft. Wie oft ist D A in E C enthalten? K. $1\frac{1}{2}$ Mahl.

L. Und

L. Und wie oft ist BD + DA oder BA in BE + EC oder BC enthalten? K. Auch $1\frac{1}{2}$ Mahl.

L. Da trifft also unsere Zeichnung auch mit der Aussage des erst angeschriebenen Satzes (BD + DA etc.) überein. Vorhin sahen wir, daß das Verhältniß BD : BE gleich ist dem Verhältnisse DA : EC. Wir haben also hier zwey Verhältnisse, die einem dritten gleich sind. Da nun zwey Verhältnisse, die einem dritten gleich sind, einander selbst gleich seyn müssen; so folgt, daß BA : BC = BD : BE. Und diese Behauptung wird wieder durch unsere Zeichnung bestätigt. Denn BA = 6 Zoll ist in BC = 9 Zoll eben so gut $1\frac{1}{2}$ Mahl enthalten, als BD = 4 Zoll in BE = 6 Zoll. Nunmehr können wir folgende Sätze aufstellen, die aber alle schon in unserm vorhin aufgestellten Lehrsatze enthalten sind:

Wenn in einem Dreyecke eine Linie parallel mit einer Seite gezogen und bis an die andern beyden Seiten verlängert wird: so verhalten sich

1) die dadurch abgeschnittenen Stücke der einen Seite eben so zu einander, wie sich zu einander verhalten die abgeschnittenen Stücke der andern Seite;

(BD : DA = BE : EC)
(DA : BD = EC : BE)

2) die beyden obern (die jenseits der schneidenden Linie liegenden) Stücke zu einander, wie sich die beyden untern (die disseits der schneidenden Linie liegenden) Stücke zu einander verhalten;

(BD : BE = DA : EC.)

3) die beyden Seiten, welche die Parallellinie durchschneidet, eben so zu einander, wie die obern oder untern Theile, welche durch diese Parallellinie auf den beyden Seiten abgeschnitten werden.

(BA : BC = BD : BE)
(BA : BC = DA : EC)

Diese Sätze übe man den Kindern recht ein, und lasse sie dabey immer die Linien, die sie jedesmahl nennen, zeigen.

Siebenzigster Satz.

Lehrsatz.

L. Hier (Fig. 38. Tab. VI.) habe ich ein Dreyeck verzeichnet, wovon zwey Seiten BA und BC durch eine gerade Linie DE geschnitten werden. Ob diese zwey Seiten proportionirt geschnitten werden und sie sich also zu einander verhalten, wie die obern oder untern Theile, das untersucht. Diese

Unter-

Untersuchung könnt ihr leicht anstellen, da ich die zwey Seiten BA und BC in lauter gleiche Theile getheilt habe. K. Diese Seiten sind proportionirt geschnitten, und sie verhalten sich daher zu einander, wie die obern oder untern Theile.

L. Wie wollt ihr mich von dieser Behauptung überzeugen? K. BD ist in BE $1\frac{1}{2}$ Mahl enthalten, desgleichen DA in EC, und eben so ist BA in BC $1\frac{1}{2}$ Mahl enthalten.

L. Richtig! Nun sagt mir, was euch von diesem Dreyecke bekannt ist. K. Es werden zwey Seiten von ihm durch eine innerhalb desselben gezogene gerade Linie proportionirt geschnitten, so daß also $BA : BC = BD : BE$ oder: $BA : BC = DA : EC$.

L. Jetzt entsteht die Frage, ob die schneidende Linie der dritten Seite dieses Deyecks gleichlaufend ist oder nicht? Wir wollen mit einander über diese Frage nachdenken und sehen, wie sie zu beantworten ist. Gesetzt, die Linie DE wäre nicht mit AC gleichlaufend, so ließe sich durch den Punct D eine andere ziehen, die entweder über oder unter DE fallen müßte und mit AC gleichlaufend seyn könnte. Wir wollen annehmen, DF und nicht DE sey gleichlaufend mit AC, und sehen was hieraus folgt. Wenn DF mit AC gleichlaufend ist, so folgt nach unserm vorigen Satze, daß BA zu BC sich verhält, wie — ? K. AD zu CF oder wie DB zu FB.

L. Wir wollen nur einstweilen folgende Proportion annehmen:

BA : BC = BD : BF.

Vorhin habt ihr aber schon gefunden, daß ich dieses Dreyeck so verzeichnet habe, daß auch BA : BC = BD : BE. Demnach wäre das Verhältniß BD : BF gleich dem Verhältnisse BA : BC; und das Verhältniß BD : BE wäre auch gleich dem Verhältnisse BA : zu BC. Was folgt aber daraus, wenn zwey Verhältnisse einem dritten gleich sind? K. Daß sie einander selbst gleich seyn müssen.

L. Welches Verhältniß müßte also auch dem Verhältnisse BD : BE gleich seyn? K. Das Verhältniß BD : BF.

L. Da hätten wir also folgende Proportion:

BD : BE = BD : BF.

Nun macht hieraus eine neue Proportion, durch Verwechslung der beyden mittlern Glieder. K. (schreiben an:)

BD : BD = BE : BF.

L. Da jede Größe sich gleich ist, so muß auch

BD = BD folglich auch

BE = BF seyn.

BE ist aber nur ein Theil von BF, und es wäre so nach der Theil so groß als das Ganze. Ist aber dieses möglich? K. Nein.

L. Wie

L. Wie lautet der Grundsatz, der uns dieses sagt? K. Daß Ganze ist größer als einer oder einige seiner Theile.

L. Wir haben also jetzt etwas Ungereimtes gefunden. Wißt ihr aus welcher Annahme wir diese Ungereimtheit hergeleitet haben? K. Aus dieser: DF ist parallel mit AC.

L. Kann nun diese Behauptung wahr seyn? K. Nein.

L. Warum nicht? K. Eben weil eine Ungereimtheit daraus folgt.

L. Diese Ungereimtheit würden wir alle Mahl folgern können, wir möchten eine Linie, welche wir wollten, außer DE mit AC parallel annehmen. Was schließt ihr hieraus? K. Daß keine andere Linie als die DE mit AC parallel seyn könne.

L. Gut! Da nun die DE diejenige Linie ist, welche die zwey Seiten BA und BC proportionirt schneidet; so können wir jetzt einen neuen Lehrsatz aufstellen, der der umgekehrte Satz von unserm gestern (letzthin) erwiesenen ist. Wie wird er wohl lauten? K. **Wenn eine Linie zwey Seiten eines Dreyecks proportionirt schneidet; so ist sie der dritten Seite desselben parallel.**

Ein und siebenzigster Satz.

Lehrsatz.

L. Nunmehr können wir zur Aufsuchung derjenigen Merkmahle, aus denen man auf die Aehnlichkeit zweyer Dreyecke schließen kann, fortschreiten, indem ich euch die hiezu nöthigen Sätze bekannt gemacht habe. Vor allem muß ich aber sehen, ob ihr noch wißt, wenn man zwey geradlinigte Figuren überhaupt einander ähnlich nennen darf. Wer sagt mir dieß?

Hier wird wiederhohlt, was S. 54 folg. des ersten Bändchens schon gesagt worden.

L. Nun sagt mir doch, was erfordert würde, wenn wir diese 2 Dreyecke (Fig. 39. u. 41. ohne die Eintheilungsstriche und die CD verzeichnend) einander ähnlich sollten nennen dürfen. K. Da müßte der Winkel $A = \angle a$, $\angle B = \angle b$, $\angle C = \angle c$ seyn und die zwey Seiten, welche den Winkel A einschließen, müßten sich zu einander eben so verhalten, wie die zwey Seiten, welche den Winkel a einschließen, desgleichen müßte $BA : BC = ba : bc$ und $CB : CA = cb : ca$ seyn.

L. Gut! Hier (Fig. 42.) ist ein Winkel CAB. Verzeichnet nun einen andern, der diesem an Größe gleich kommt. K. (verzeichnen dae Fig. 45.)

L. Jetzt verbindet die Puncte D und E durch eine gerade Linie. K. (ziehen die DE Fig. 42.)

L. Nun

L. Nun zieht von c aus eine gerade Linie bis an den andern Schenkel dieses Winkels dae, (Fig. 45.) macht aber den Winkel bey c gerade so groß, als der Winkel ADE (Fig. 42.) ist. K. Ziehen die cb (Fig. 45.).

L. Nun haben wir in abc und AED zwey Dreyecke, in welchen einige Stücke von gleicher Größe sind. Was sind das für Stücke? K. Zwey Winkel.

L. Sagt mir in einem zusammenhängenden Satze, was euch von diesen beyden Dreyecken bekannt ist. K. Zwey Winkel in dem einen einzeln genommen sind so groß, als zwey einzelne Winkel in dem andern.

L. Wie verhalten sich denn wohl in diesem Falle die beyden übrigen Winkel zu einander? K. Sie müssen auch einander gleich seyn.

L. Also $\angle$ E $\angle$ b da haben wir nur zwey Figuren, welche haben 1) eine gleiche Anzahl Seiten, 2) Winkel, die alle in der Ordnung einander gleich sind. Was dürfte jetzt nur noch für ein Merkmahl an beyden Figuren Statt finden, um sie einander ähnlich nennen zu können? K. Die Seiten, die gleiche Winkel einschließen, müssen proportionirt seyn.

L. Um zu erfahren, ob dieß Merkmahl noch vorhanden ist oder nicht, wollen wir eine Untersuchung anstellen, und deshalb auf die Schenkel des Winkels A in dem $\triangle$ ADE die zwey Seiten, welche den Winkel a in dem $\triangle$ abc einschließen, tragen und die Endpuncte dieser zwey

aufgetragenen Seiten durch eine gerade Linie verbinden. K. (machen AR (Fig. 42.) = ac (Fig. 45.), AQ = ab und ziehen die RQ.)

L. Nun denkt einmahl nach und seht, ob sich an den beyden Dreyecken ARQ und abc nicht die Merkmahle der Gleichheit und Aehnlichkeit vorfinden. K. Ey ja! In dem einen sind zwey Seiten, mit dem dazwischen liegenden Winkel gerade so groß, wie diese Stücke in dem andern. Es ist nämlich AR = ac, AQ = ab und ∢ A = ∢ a.

L. Welchem Winkel muß folglich der ∢ R von dem △ ARQ gleich seyn? K. Dem ∢ c in dem △ abc.

L. ∢ R = ∢ c, ∢ D aber auch = ∢ c, daraus folgt? K. Daß auch ∢ D = ∢ R.

L. Wie lautet der Grundsatz, der euch dieses sagt? K. Wenn zwey Größen einer dritten ꝛc.

L. RQ und DE sind zwey gerade Linien, welche durch eine dritte, nämlich durch CA so geschnitten werden, daß ein innerer (∢ D) und ein äußerer (∢ R) entgegenstehender Winkel einander gleich sind. Was folgt aus diesem Umstande? K. Daß RQ und DE gleichlaufend sind.

L. Da werden also zwey Seiten des △ DE von einer geraden Linie RQ, die mit der dritten Seite gleichlaufend ist, geschnitten. Was folgt hieraus? K. Daß die Seiten AD und AE proportionirt geschnitten werden.

L. Wel-

L. Welchem Verhältnisse muß daher das Verhältniß AD : AE gleich seyn? K. Sowohl dem Verhältnisse AR : AQ als dem Verhältnisse RD : QE.

L. Also ist

AD : AE = AR : AQ.

Welchen Linien sind aber AR und AQ gleich? K. Den Linien ac und ab.

L. Da man von zwey gleichen Größen immer eine statt der andern setzen kann; so können wir in der erst angeschriebenen Proportion statt AQ und AR setzen — nun welche Größen? K. ac und ab.

L. Schreibt nun die Proportion, worin ac und ab mit vorkommen, an. K. (schreiben an:)

AD : AE = ac : ab.

L. Ganz auf die nämliche Art läßt sich auch beweisen, daß auch noch

2) EA : ED = ba : bc

3) DA : DE = ca : cb.

Wir haben demnach gefunden, daß von diesen zwey Dreyecken DAE und abc 1) die Winkel des einen der Ordnung nach gleich sind den Winkeln des andern, 2) daß die Seiten, welche einerley Winkel einschließen, in beyden Figuren einerley Verhältniß haben. Wie können wir nun dieser Merkmahle wegen diese zwey Dreyecke nennen? K. Einander ähnlich.

L. Wißt ihr noch, was uns von diesen zwey Dreyecken Anfangs nur bekannt war, und woraus wir durch eine Reihe von Schlüßen die Aehnlichkeit dieser zwey Figuren beweisen konnten? K. Ja.

L. Was war nur denn davon bekannt? K. Daß in dem einen von ihnen zwey Winkel, einzeln genommen, eben so groß sind, als zwey Winkel im andern.

L. Mit diesem Umstande ist erstlich die Gleichheit der übrigen beyden Winkel, zweytens die Proportionalität derjenigen Seiten, welche gleiche Winkel einschließen, unzertrennlich und nothwendiger Weise verbunden. Um also überzeugt seyn zu können, daß zwey Dreyecke einander ähnlich seyn, dürfen wir weiter nichts wissen, als — ? K. Daß in dem einen von ihnen zwey Winkel, einzeln genommen, eben so groß sind, als zwey Winkel im andern.

L. Und wenn ihr das, was ihr jetzt gelernt habt, als einen Lehrsatz ausdrücken wollt, so müßt ihr sprechen — ? K. Wenn in einem Dreyecke zwey Winkel einzeln genommen eben so groß sind, als zwey Winkel in einem andern Dreyecke; so sind beyde Figuren einander ähnlich.

L. Hier (Fig. 39. und 41.) sind zwey Dreyecke ABC und abc. Jeder von den beyden Winkeln A und a hält 118 Grad, jeder von den zwey Winkeln B und b hält 26 Grad. Was könnt ihr nun von diesen zwey Dreyecken behaupten? K. Daß sie einander ähnlich seyn müssen.

L. Rich-

L. Richtig! Die Seite A C ist 3, A B aber 4 Schuh lang. Wie oft ist demnach A C in A B enthalten? K. $1\frac{1}{3}$ Mahl.

L. Wie oft muß nun a c in a b enthalten seyn? K. Auch $1\frac{1}{3}$ Mahl.

L. Woher könnt ihr dieß wissen? K. Weil die Winkel A und a einander gleich sind, und folglich die Seiten, welche Winkel einschließen, in beyden Triangeln einerley Verhältniß haben müssen.

L. Wenn die Seite a c = 3 halben oder $1\frac{1}{2}$ Schuh angenommen wird, wie lang muß a b seyn? K. 4 halbe oder 2 ganze Schuh. —

L. Wenn ich sage: verzeichnet mir zwey ungleiche, aber ähnliche Dreyecke, was dürft ihr da in der einen Figur nur so groß wie in der andern machen? K. Zwey einzelne Winkel.

L. Verzeichnet mir jetzt ein Paar ungleiche, aber ähnliche Dreyecke.

Uebung im Verzeichnen ähnlicher Dreyecke zu Folge des hier erwiesenen Lehrsatzes!

Zwey und siebenzigster Satz.

Zusatz.

L. Hier (Fig. 43. VI.) habe ich einen Triangel, in welchem ich die Linie R Q parallel mit einer Seite desselben, nämlich mit C B gezogen und wodurch ich einen kleinern Triangel von einem gröſ-

größern abgeschnitten habe. Der kleinere und von einem andern abgeschnittene Triangel ist nämlich — ? K. ARQ.

L. Und welches ist der größere, wovon RQA ein Theil ist? K. Der △ ACB.

L. Da ihr wißt, daß RQ mit CB gleichlaufend ist, so könnt ihr mir sagen, wie sich die Winkel ARQ und ACB zu einander verhalten. K. Diese müssen einander gleich seyn, weil hier die Parallelen RQ und CB von der Linie CA geschnitten werden und in diesem Falle ein äußerer einem innern entgegenstehenden Winkel gleich seyn muß.

L. Welcher Winkel ist denn wohl der größere, der Winkel A in dem Triangel ARQ oder der Winkel A in dem Triangel ACB? K. Da ∠ A beyden Triangeln zugehört, so muß er in dem einen so groß, als in dem andern seyn.

L. Da haben wir also in ARQ und ACB zwey Dreyecke, wovon das eine zwey Winkel einzeln genommen von eben der Größe hat, als das andere. Wovon ist aber nach unserm Satze dieser Umstand ein Merkmahl? K. Von der Aehnlichkeit zweyer Dreyecke.

L. Also ist der von dem größern Triangel ABC abgeschnittene kleinere Triangel ARQ jenem ähnlich. Was dürfte ich nur thun, um von dem größern Triangel ABC einen kleinern jedoch dem größern ähnlichen abzuschneiden. K. Da dürften Sie nur mit einer Seite des größern Triangels

gels eine Linie parallel ziehen und sie bis an die übrigen beyden Seiten verlängern.

L. Gut! Versucht nun wieder in einem zusammenhängenden Satze auszudrücken, was ihr jetzt gelernt habt. K. Wenn man in einem Triangel eine Linie mit einer Seite parallel zieht und sie bis an die übrigen beyden Seiten verlängert; so muß der dadurch abgeschnittene kleinere Triangel dem größern ähnlich seyn.

L. Recht! Da haben wir einen Zusatz zu unserm vorhin erwiesenen Lehrsatze.

Drey und siebenzigster Satz.

Zusatz.

L. Nun sagt mir, welches Verhältniß dem Verhältnisse AR : RQ (Fig. 43) gleich seyn muß. K. Das Verhältniß AC : CB.

L. Schreibt an, daß diese zwey Verhältnisse einander gleich sind. K. (schreiben an:) AR : RQ = AC : CB.

L. Macht jetzt aus dieser Proportion gleich eine neue, durch Verwechslung der zwey mittlern Glieder: K. (schreiben:) AR : AC = RQ : BC.

L. Nun

L. Nun sagt mir, welches Verhältniß dem Verhältnisse AQ : QR gleich seyn muß. K. Das Verhältniß AB : BC.

L. Da ist also

AQ : QR = AB : BC.

Verwechselt auch hier die beyden mittlern Glieder und schreibt die dadurch neu entstehende Proportion an. K. (schreiben:) AQ : AB = QR : BC.

L. Jetzt leset diese vier Proportionen von unserer hier verzeichneten Figur (Fig. 43.) ab. K. (wiederhohlen.)

L. Nun verlängert die Seiten AC und AB von dem Dreyecke ABC unbestimmt. K. (thun dieß und setzen z. B. noch CG und BH an.)

L. Glaubt ihr wohl, daß durch das Ansetzen der Stücke CG und BH die Proportionen die wir erst angeschrieben haben, aufgehoben oder verändert worden seyn? K. Nein.

L. Waum glaubt ihr das nicht? K. Weil ja die Linien RQ und CB, AR und AQ, AC und AB noch die nämlichen und gar nicht größer oder kleiner gemacht worden sind.

L. Das ist richtig, merkt es daher recht. Was bilden denn die zwey Linien AG und AH? K. Einen Winkel.

L. Könnt ihr mir von den Schenkeln dieses Winkels nichts sagen, (sind sie nicht etwa geschnitten)? K. Ey ja, sie sind geschnitten.

L. Durch

L. Durch wie viel Linien? K. Durch zwey.

L. Und was haben diese zwey Linien für eine Richtung gegen einander? K. Sie laufen parallel.

L. Nun beschreibt mir diese Figur GAH und bringt in eure Beschreibung alles, was ich euch jetzt abgefragt habe. K. Das ist ein Winkel, dessen Schenkel durch zwey Parallellinien geschnitten sind.

L. Die Abschnitte der Schenkel rechnen wir von A an. Von der Linie AG ist demnach abgeschnitten durch RQ das Stück AR, und durch CB das Stück AC. Eben so sind vom andern Schenkel abgeschnitten die Stücke AQ und AB. Jetzt sagt mir wieder, welches Verhältniß nach einer unserer vorigen Proportionen (der zweyten) dem Verhältnisse RQ : CB gleich seyn muß? K. AR : AC oder AQ : QB.

L. Da machen also hier die gleichlaufenden Linien, welche die Schenkel dieses Winkels schneiden mit den Abschnitten derselben Proportionen. Und da dieß alle Mahl der Fall ist, so oft die Schenkel eines Winkels von Parallelen geschnitten werden; so können wir allgemein behaupten — ? nun wer weiß, was? K. Daß Parallellinien, welche die Schenkel eines Winkels schneiden, den Abschnitten derselben proportionirt sind.

L. Hier (Fig. 40.) ist ein Winkel, dessen Schenkel durch ein Paar Parallelen geschnitten sind und das Stück AE ist in AB gerade zwey

Mahl

Mahl enthalten. Könnt ihr mir nun sagen, wie oft ED in der BC enthalten seyn muß? K. Zwey Mahl.

L. Welcher Satz sagt euch dieß? K. Der: Parallellinien, welche die Schenkel ꝛc.

L. Nun faßt die Linie ED mit dem Zirkel und sagt, ob sie wirklich zwey Mahl in BC enthalten ist. K. (finden den erst angeführten Satz durch die Erfahrung bestätigt, wenn anders die Verzeichnung mit der nöthigen Accuratesse gemacht worden ist.)

Vier und siebenzigster Satz.

Lehrsatz.

L. Hier (Fig. 44. u. 46.) habe ich zwey ungleiche Dreyecke in deren einem ein Winkel A so groß ist als ein Winkel a in dem andern, verzeichnet, und die Seiten, welche diese zwey gleichen Winkel einschließen, habe ich sowohl in dem einen, als in dem andern Triangel in gleiche Theile getheilt, damit ihr leicht eine Untersuchung anstellen und mir sagen könnt, ob diese (gleiche Winkel einschließenden) Seiten proportionirt sind, oder nicht. K. Sie sind einander proportionirt.

L. Wie wollt ihr mich hievon überzeugen? K. AB ist in AC, und ab in ac $1\frac{1}{2}$ Mahl enthalten.

L. Nun

L. Nun sagt mir, was euch von diesen zwey Dreyecken bekannt ist. K. Sie haben beyde einen Winkel gleich, und die ihn einschließenden Seiten sind proportionirt.

L. Jetzt wollen wir sehen, was wir aus diesem Umstande schließen können. Wir wollen zu dem Ende von A B ein Stück = a b, und von AC ein Stück = ac, und zwar von dem Puncte A aus gerechnet, abschneiden, und beyder Stücke Endpuncte durch eine gerade Linie verbinden. Wer thut dieß? K. (ziehen die DE.)

L. Ihr wißt, daß der ∠ A = ∠ a, und AD = ab, und AE = ac. Was folgt hieraus? K. Daß die beyden Triangel ADE und abc einander gleich und ähnlich seyn müssen.

L. Nennt mir einmahl alle gleichnamigen und daher gleiche Winkel. K. A und a, D und b, E und c.

L. Diese gleichen Winkel merkt einstweilen. Wir hatten vorhin die Proportion AB : AC = ab : ac. Können wir hier statt der Größe ab und ac nicht ein Paar andere, diesen gleiche, Größen setzen? K. O ja, die Größen AD und AE.

L. Nun so löscht aus unserer Proportion ab und ac weg, und setzt dafür die erst genannten Größen. K. (schreiben:) AB : AC = AD : AE.

L. Diese Proportion sagt auch, daß zwey Seiten dieses Triangels, nämlich AB und AC durch die Linie DE proportionirt geschnitten sind.

Und da euch dieß bekannt ist, so könnt ihr auch wissen, was die Linie DE gegen BC für eine Richtung haben muß. Sagt mir dieß. K. DE muß mit BC parallel laufen.

L. Wie lautet der Satz, nach dem ihr dieses wissen könnt? K. Wenn ꝛc. (70ster S.)

L. Wie muß sich nun der < ADE zu dem < ABC verhalten, da DE mit BC parallel läuft? K. Beyde müssen einander gleich seyn.

L. Vorhin habt ihr gesagt < b sey = < ADE; jetzt behaupten wir, daß auch < B sey = < ADE. Was folgt hieraus? K. Daß auch < B = < b seyn müsse, weil die zwey Größen B und b einer dritten gleich sind.

L. Nun haben wir gefunden, daß < B = < b, und nach unserer Verzeichnung ist auch < A = a. Es sind also hier in dem einen Dreyecke zwey Winkel einzeln genommen so groß, als zwey Winkel in dem andern. Was folgt hieraus? K. Daß beyde Dreyecke einander ähnlich seyn müssen.

L. Gut! Dieß Mahl wußten wir aber nicht gleich Anfangs, daß in dem einen Dreyecke zwey Winkel, einzeln genommen, eben so groß sind, als zwey Winkel in dem andern; sondern wir mußten dieses erst durch Schlüße finden. Woraus (aus welchem uns gleich Anfangs bekannten Umstande) haben wir aber dieses schließen können? K. Daraus, daß wir wußten, daß beyde Dreyecke einen Winkel gleich, und die ihn einschließenden Seiten proportionirt haben.

L. Da

L. Da hätten wir sonach ein zweytes Merkmahl, woran wir die Aehnlichkeit zweyer Dreyecke erkennen können, und wenn wir dieses Merkmahl in einem Lehrsatze angeben wollen, so müssen wir sprechen — ? K. Wenn zwey Dreyecke einen Winkel gleich, und die ihn einschließenden Seiten proportionirt haben; so sind sie einander ähnlich.

L. Gut! Wer getraut sich wohl, den Beweis für diesen Lehrsatz ohne meine Beyhülfe zu führen? K. (versuchen dieß zu thun.)

L. Hier ist ein Dreyeck (dergleichen Figur verzeichnend) das einen Winkel von 80 Grad hat, und in dem die eine von den Seiten, welche diesen Winkel einschließen, in der andern gerade zwey Mahl enthalten ist. Könnt ihr mir nun ein anderes, aber diesem ähnliches, Dreyeck verzeichnen? K. Ja.

L. Wie wollt ihr denn dieses anfangen? K. Wir verzeichnen erst einen Winkel von 80 Grad, dann machen wir den einen Schenkel noch Ein Mahl so lang als den andern, und verbinden die Endpuncte dieser Schenkel durch eine gerade Linie.

L. Nun macht dieses so.

Diese Uibung wird eine Zeit lang fortgesetzt.

Fünf und siebenzigster Satz.

Lehrsatz.

L. Hier (Fig. 39. u. 41.) sind zwey Dreyecke, wovon sowohl das eine, als das andere in gleiche Theile abgetheilte Seiten hat, welche Abtheilung ich deßwegen gemacht habe, damit ihr das Verhältniß von je zwey und zwey Seiten leicht finden könnt. Seht einmahl, wie sich die den Winkel A einschließenden Seiten zu einander verhalten. K. A C ist in A B $1\frac{1}{3}$ Mahl enthalten.

L. Und wie verhält sich a c zu a b? K. a c ist in a b auch $1\frac{1}{3}$ Mahl enthalten.

L. Wie oft ist denn wohl A C in C B enthalten? K. 2 Mahl.

L. Und a c in c b? K. Auch 2 Mahl.

L. Nun haben wir schon zwey Mahl gesehen, daß sich ein Paar Seiten in dem einen Dreyecke zu einander verhalten, wie ein Paar Seiten in dem andern. Seht doch, ob dieß nicht auch der Fall mit C B und B A, c b und b a ist. K. Ja er ist es. Denn C B ist in B A, und c b in b a $\frac{2}{3}$ Mahl enthalten.

L. Weil die Merkmahle, die wir jetzt an diesen beyden Dreyecken wahrgenommen haben, vorhanden sind, so sagt man: die Seiten dieser zwey Dreyecke sind einander proportionirt, oder: die Seiten des einen Dreyecks haben zu einander das nämliche Verhältniß, welches die Seiten des andern zu einander haben. Ob unter diesen Umständen

stånden auch die Winkel, welche von proportionirten Seiten eingeschlossen werden, einander gleich, die Dreyecke also einander ähnlich seyn oder nicht, das wollen wir mit einander untersuchen. Wir wollen zu dem Ende ab auf AB und zwar von A nach B, und ac auf AC von A nach C tragen, und beyde aufgetragene Linien durch eine dritte gerade Linie verbinden. Verrichtet selbst dieses Geschäft. K. (ziehen die DE Fig. 39.)

L. Ihr wißt schon, daß AB : AC = ab : ac. Können wir aber statt ab und ac nicht wieder ein Paar andere diesen gleiche Grössen setzen? K. Ja, AE und AD.

L. Wie lautet alsdann unsere Proportion, wenn wir diese Vertauschung vornehmen? K. AB : AC = AE : AD.

L. Da sind also auch hier zwey Seiten eines Dreyecks von einer Linie (DE) proportionirt geschnitten. Was folgt hieraus, nach einem unserer letzthin erwiesenen Lehrsätze in Ansehung der Richtung, die die DE zu der CB hat? K. Daß DE mit CB parallel laufen muß.

L. Richtig! Wenn aber DE mit CB parallel läuft, so muß, nach einem unserer letzten Sätze der kleinere Triangel ADE dem größern ACB ähnlich seyn, und es muß sich deßwegen AE zu ED verhalten, wie — ? K. Wie AB zu BC.

L. Das Verhältniß AB : BC ist aber gleich dem Verhältnisse ab : bc, so daß wir also hier zwey Verhältnisse, nämlich AE : ED und ab

ab : bc haben, welche einem dritten, nämlich AB : BC gleich sind. Was folgt hieraus? K. Daß die ersten zwey Verhältnisse selbst einander gleich seyn müssen, nämlich

$$AE : ED = ab : bc.$$

L. Nun wollen wir aus dieser Proportion eine neue, durch Verwechslung der beyden mittlern Glieder machen. K. (schreiben an:) AE : ab = ED : bc.

L. Wie oft ist denn AE in ab enthalten? K. Ein Mahl.

L. Da sind also beyde Linien einander gleich. Welches wird denn wohl die größere von den Linien ED und bc seyn? K. Diese müssen ja auch einander gleich seyn, weil diese das nämliche Verhältniß zu einander haben, wie AE und ab, und diese einander gleich sind.

L. Da ihr nun wißt, daß ED = bc ist, so könnt ihr mir sagen, ob sich an den zwey Dreyecken AED und abc keines von den Merkmahlen der Gleichheit und Aehnlichkeit vorfindet. K. Ja es findet sich eins.

L. Welches? K. Drey einzelne Seiten in dem einen dieser Dreyecke sind so groß, als etc.

L. Nennt mir einmahl den Winkel im △ AED, welcher dem ∢ a gleich seyn muß. K. A.

L. Und welcher Winkel im △ AED ist äqual ∢ c? K. ∢ ADE.

L. ∢ c = ∢ D nach eurer jetzigen Behauptung; ∢ C = ∢ D, weil △ ADE ähnlich

lich ist dem $\triangle$ ACB. Was folgt hieraus? K. Daß $\angle C = \angle c$ seyn müsse.

L. Da sind also in dem einen dieser zwey Dreyecke, nämlich in ACB, zwey Winkel einzeln genommen so groß, als zwey Winkel in dem andern (in acb). Nämlich $\angle A = \angle a$ u. $\angle C = \angle c$. Wie müssen sich nun wohl die übrigen beyden Winkel, nämlich B und b zu einander verhalten? K. Diese müssen auch einander gleich seyn.

L. Da sind also die Winkel in diesen zwey Dreyecken der Ordnung nach einander gleich, und die sie einschließenden Seiten sind proportionirt. Wie können wir deßhalb diese zwey Dreyecke nennen? K. Einander ähnlich.

L. Aus welchem Umstande haben wir dieß wohl auf die Aehnlichkeit dieser Dreyecke schließen können? K. Aus dem, daß die drey Seiten in dem einen derselben rc.

L. Da haben wir sonach ein neues Merkmahl der Aehnlichkeit zweyer Dreyecke, und wenn wir dieses in einem Lehrsatze ausdrücken sollen, so müssen wir sprechen — nun wie? K. Zwey Dreyecke, deren Seiten proportionirt sind, sind einander ähnlich.

L. Nunmehr sind euch die drey möglichen Merkmahle der Aehnlichkeit zweyer Dreyecke bekannt. Wir wollen sie hier von diesen drey Paar Dreyecken (Fig 47 u. 48, 49 u. 50, 53 u 54. Tab. VII) gleichsam ablesen, dann will ich sehen, wer mir sie auswendig wird sagen können. Die in

in zwey Triangeln mit einerley Zeichen bemerkten Winkel sind einander gleich, und die Seiten, an welchen die Ziffern 1, 2, 3, 4; ferner 5, 6, 7, 8; endlich 9, 10, 11, 12 stehen, sind proportionirt.

Die Kinder sprechen nun: 1) Wenn in einem Dreyecke zwey Winkel einzeln genommen (auf Fig. 47. u. 48. zeigend) so groß sind, als zwey einzelne Winkel in einem andern; so sind die Dreyecke einander ähnlich. 2) Wenn zwey Dreyecke, wie diese hier, (auf 49. u. 50. zeigend) einen Winkel gleich, und die ihn einschließenden Seiten proportionirt haben; so ꝛc. 3) Wenn in einem von zwey Dreyecken, wie hier (auf 53. u. 54. zeigend) sich die drey Seiten eben so zu einander verhalten, wie in dem andern; so ꝛc.

L. Ihr habt nun gesehen, daß es eben so viel verschiedene Merkmahle der Aehnlichkeit als der Congruenz zweyer Dreyecke giebt, und wenn ihr die eine Classe dieser Merkmahle mit der andern vergleicht; so werdet ihr finden, daß sie beyde mit einander viel Aehnlichkeit haben. Diese Vergleichung könnt ihr am besten anstellen, wenn ich folgendes anschreibe:

Merkmahle der Congruenz zweyer Dreyecke.	Merkmahle der Aehnlichkeit zweyer Dreyecke.
1) Zwey Winkel und die dazwischen liegende Seite in beyden gleich groß.	1) Zwey Winkel einzeln genommen in beyden gleich groß.

2) Ein

2) Ein Winkel und die einschließenden Seiten in beyden gleich groß.	2) Ein Winkel in beyden gleich groß, und die ihn einschließenden Seiten proportionirt.
3) Die drey Seiten einzeln genommen in dem einen so groß, als die drey Seiten in dem andern.	3) Die drey Seiten in beyden einander proportionirt.

Sechs und siebenzigster Satz.

Aufgabe.

L. Wenn ich euch sage, daß die Linie DE (Fig. 51.) mit einer Seite des Dreyecks ABC, nämlich mit der Seite BC parallel gezogen ist; so könnt ihr mir sagen, ob die Verhältnisse AD : AE und DB : EC einander gleich sind oder nicht. K. Sie sind einander gleich.

L. Wie lautet der Satz, der euch dieß sagt? K. Wenn ꝛc. (69ster S.)

L. Wir wollen also anschreiben: AD : AE = DB : EC, woraus erhellet, daß wir jetzt AD die erste, AE die zweyte, DB die dritte, EC die vierte von den vier proportionirten Linien hier nennen. Nun lösche ich EC, also die vierte zu diesen drey (zeigend) gehörigen, Proportionallinien weg, um zu erfahren, ob ihr wohl im Stande seyd, sie ohne meine Beyhülfe wieder zu ziehen

(EC auslöschend). Könnt ihr dieß wohl? K. Freylich.

L. Was wollt ihr denn thun, um die weggelöschte Linie wieder zu erhalten? K. Wir verlängern AE bis an die Linie BC.

L. Das wäre recht. Wie aber, wenn ich die BC auch weglöschte, euch aber die Erlaubniß gäbe, sie wieder zu ziehen, wäret ihr da wohl auch im Stande, die Linie EC d. h. die vierte Proportionallinie wieder zu finden? K. Ja wohl.

L. Wie wollt ihr denn dieses anfangen? K. Wir zögen durch den Punct B eine Linie von unbestimmter doch hinreichender Länge mit DE parallel, hierauf verlängerten wir AE bis sie die erst gezogene (BF) schnitte.

L. Auch dieß wäre recht! Macht es einmahl so (BF auch weglöschend). K (ziehen die BF mit DE parallel und verlängern die AE, bis an die BF).

L Ihr habt jetzt in der EC wirklich die vierte Proportionallinie zu 1, 2 und 3 gefunden. Nun will ich EC und BF abermahls auslöschen und die übrigen drey Linien aus einander und hieher legen (Fig. 52. verzeichnend), um zu erfahren, ob ihr auch jetzt im Stande seyd, die ganze vorige Figur wieder herzustellen und zu diesen drey Linien (Fig. 52.) die vierte Proportionallinie wieder zu finden. Wer ist wohl so geschickt, mir sagen zu können, wie dieses zu bewerkstelligen ist? K. Man setzt ad und ae (Fig. 52.) unter einem beliebigen Winkel zusammen und verbindet ihre bey-

beyden Endpuncte durch eine gerade Linie. Hierauf verlängert man a d und macht das angesetzte Stück = d b. Nun zieht man durch den Endpunct von D B eine Linie parallel mit derjenigen, welche die Endpuncte der A D und A E mit einander verbindet. Endlich wird A E bis an die zuletzt (mit D E parallel) gezogene Linie verlängert.

L. Dieß Verfahren wäre richtig. Um euch aber die Sache noch etwas zu erleichtern, will ich hier (Fig 51.) einen beliebigen Winkel verzeichnen, auf dessen Schenkel ihr nur die drey Linien a d a e und d b (Fig. 52.) in der Ordnung, wie sie gegen einander stehen müssen, tragen dürft. Thut dieß einmahl. K. (tragen a d Fig. 52. von A nach D Fig. 51. a e von A nach E und d b von D nach B.)

L. Was habt ihr wohl jetzt zu thun? K. Wir müssen erstlich die Puncte D und E mit einer geraden Linie verbinden und dann durch den Punct B eine Linie parallel mit D E ziehen.

L. Thut dieses. — So! Jetzt hat sich die vierte Proportionallinie von selbst ergeben. Welche ist es? K. Die E C.

L. Richtig! Jetzt will ich euch hier (Fig. 52.) abermahls drey Linien mit dem Auftrage geben, die vierte Proportionallinie dazu zu suchen. K. (verzeichnen Fig. 51.)

L. Nun sehe ich, daß ihr wieder eine gewisse Aufgabe auflösen könnt. Wie lautet diese? K.

Zu drey gegebenen Linien die vierte Proportionallinie zu suchen.

L. Wer kann mir denn das Verfahren beschreiben, welches ihr, um diese Aufgabe zu lösen, angedeutet habt? K. Wir haben uns einen beliebigen Winkel A verzeichnet, alsdann haben wir die zwey ersten von den drey gegebenen Linien auf die Schenkel des Winkels A getragen, indem wir AD = ad, AE = ae machten. Hierauf haben wir auf denjenigen Schenkel, auf welchen wir die erste Linie getragen haben, auch die dritte getragen, indem wir DB = db machten. Endlich haben wir die Linie DE und mit dieser parallel die BC durch den Punct B gezogen.

L. Wie wollt ihr denn aber beweisen, daß AD : AE = DB : EC (Fig. 51.) oder, welches einerley ist, ad : ae = db : EC? K. ABC ist ein Dreyeck, in welchem eine Linie mit einer Seite desselben parallel gezogen worden ist. Nun werden aber in diesem Falle die übrigen beyden Seiten des Dreyecks proportionirt geschnitten, es muß sich daher AD : AE = DB : EC oder, weil AD = ad, AE = ae, DB = db, ad : ae = db : EC verhalten.

L. Nun wähle sich jeder selbst drey gerade Linien und suche auf die euch jetzt bekannt gemachte Weise die vierte Proportionallinie dazu.

Uibung!

Sie-

Sieben und siebenzigster Satz.

Zusatz.

L. Eine Proportion, wie z. B. diese 3 : 6 = 6 : 12, wo die beyden mittlern Glieder einerley Größen sind, heißt eine stetige Proportion. Wenn in einer solchen Proportion die beyden ersten Glieder gegeben sind, so ist zugleich auch das dritte bekannt. Denn dieses (das dritte) ist alle Mahl so groß, als das zweyte. Wenn uns daher zwey Linien gegeben wären, wie z. B. ab und ac (Fig. 55.), um dazu die dritte Proportionallinie zu suchen; so wäre es eben so viel als wenn uns ab, ac und noch Ein Mahl ac gegeben wären, um zu diesen drey Linien die vierte Proportionallinie zu suchen. Und da ihr bereits diese Aufgabe auflösen könnt, so werdet ihr, wenn ihr verstanden habt, was ich erst gesagt habe, auch zu zwey gegebenen Linien die dritte Proportionallinie finden können. Wer will versuchen, diese Aufgabe aufzulösen und mir dann sein Verfahren gehörig zu beschreiben? K. (verzeichnen Fig. 58. indem sie auf die Schenkel des Winkels A tragen: 1) ab von A nach B, 2) ac von A nach C, 3) ac noch Ein Mahl von B nach D, und dann die BC und mit ihr parallel die DE ziehen, und beschreiben hierauf dieß Verfahren gehörig.)

Acht und siebenzigster Satz.

Aufgabe.

L. Jetzt will ich euch nach und nach verschiedene Befehle ertheilen und sehen, wer sie am pünctlichsten wird befolgen können. Verzeichnet euch zwey gerade Linien von verschiedner, aber willkührlicher Länge, und nennt die kürzere a b, die längere a c. K. (verzeichnen Fig. 55.)

L. Jetzt verzeichnet eine andere gerade Linie und tragt a b und a c neben einander darauf, bemerkt aber durch einen subtilen Strich den Punct, wo sie an einander stoßen. K. (verzeichnen A E von Fig. 56. und machen AB = a b und BC = a c.)

L. Jetzt bilden die beyden zuerst verzeichneten geraden Linien a b und a c eine einzige, nämlich die A C (Fig. 56.). Diese A C halbirt, nehmt die Hälfte derselben zum Halbmesser und beschreibt damit aus dem Halbirungspuncte einen Halbkreis über A C. K. (suchen den Punct F, nehmen F C oder A F zum Halbmesser und beschreiben damit den Halbkreis A D C.)

L. Nun errichtet aus demjenigen Puncte, wo die beyden Linien a b und a c zusammen stoßen, eine senkrechte Linie und verlängert sie bis an die Peripherie des erst beschriebenen Halbkreises. K. (errichten die senkrechte B D aus dem Puncte B.)

L. Alles, was wir jetzt verzeichnet haben, soll stehen bleiben, und Carl soll die Befehle, die

ich

ich erst ertheilt habe, noch Ein Mahl in derselben Ordnung und mit der nämlichen Pünctlichkeit ertheilen, ihr übrigen aber sollt sie befolgen. (Ein Kind sagt, was geschehen soll, und die übrigen thun was ihnen befohlen wird, und verzeichnen so nach Fig 56. noch Ein Mahl.)

L. Wer ist wohl jetzt im Stande, mir recht richtig und bestimmt zu sagen, was wir jetzt nach und nach gethan haben? K. Erstlich haben wir zwey gerade Linien von verschiedener, doch willkührlicher Länge gezogen u. s. w.

L. Durch dieses Verfahren haben wir in der DB eine Linie gefunden, welche die mittlere Proportionallinie zu den zwey gegebenen Linien ab und ac ist. — In dieser Proportion: 3 : 6 = 6 : 12. ist 6 die mittlere Proportionalzahl zwischen 3 und 12, d. h. 6 ist diejenige Zahl, in welcher die 3 gerade so oft enthalten ist, als sie selbst (die 6) in der 12 enthalten ist. Und unter diesen Linien (Fig 63. verzeichnend) ist bc die mittlere Proportionallinie. Was das heißt, könnt ihr mir wahrscheinlich sagen. K. bc ist diejenige Linie, in welcher ab gerade so oft enthalten ist, als sie selbst (die bc) in der cd enthalten ist.

L. Gut! Zwischen jeden zwey gegebenen Linien ist eine mittlere Proportionallinie möglich, und die Aufgabe: Zu zwey gegebenen geraden Linien die mittlere (Proportionallinie) zu finden, könnt ihr nun auflösen, und es bleibt uns nur noch übrig, die Richtigkeit unsers Verfahrens auch zu beweisen. Dieß wollen wir auch

jetzt

jetzt thun, weswegen wir hier (Fig. 66.) noch ein Paar Hülfslinien, nämlich AD und DC ziehen müssen. — Wie viel haben wir jetzt Dreyecke in dieser Figur? K. Zwey.

L. Nennt sie. K. ABD und BCD.

L. Ich sehe noch ein drittes, wer findet auch dieses? K. Das ist das Dreyeck ACD.

L. Richtig! Diese drey Dreyecke, will ich jetzt hier einzeln verzeichnen, weil ihr sie dann bequemer mit einander vergleichen könnt (Fig. 59, 60 u. 61. verzeichnend). Nun sagt mir, was der Winkel o + u oder der ∢ D (Fig. 56.) für ein Winkel seyn muß. K. Ein rechter, weil es ein Winkel im Halbkreise ist.

L. Da muß also auch der ∢ D hier in diesem Dreyecke (Fig. 59.) ein rechter seyn, weil dieses das nämlich hier oben im Halbkreise verzeichnete Dreyeck ist. Was muß denn wohl der Winkel r in diesem Dreyecke (Fig. 56.) für ein Winkel seyn? K. Auch ein rechter.

L. Warum behauptet ihr dieses? K. Weil wir die BD senkrecht auf die AC gestellt haben.

L. Das nämliche Dreyeck, worin der Winkel r ist, steht noch Ein Mahl auf unserer Tafel verzeichnet. Wo ist es? K. Hier (auf ABD Fig. 60. zeigend).

L. Und welches ist der Winkel, den wir hier oben r nennen? K. Hier der mit B bezeichnete ist es.

L. Der

L. Der Winkel D in dieser Figur (Fig. 59.) ist ein rechter, desgleichen auch der Winkel B dahier (Fig. 60.). Wie müssen sich nun diese zwey Winkel zu einander verhalten? K. Sie müssen als rechte Winkel einander gleich seyn.

L. Dieses will ich mit einerley Zeichen bemerken, die ich in die Winkel B (Fig. 60.) und D (Fig. 59.) mache. Nun seht, ob ihr nicht heraus bringen könnt, wie sich der Winkel A (Fig. 59.) zu dem Winkel A (Fig. 60.) verhalten muß. Wenn ihr diese Figur hier (Fig. 56.) mit betrachtet, so werdet ihr dieß gewiß finden. K. Das ist ein Winkel, der beyden Dreyecken zugehört, daher muß er auch in beyden einerley Größe haben.

L. Allerdings. Ich will dieß wieder durch ein Paar Zeichen bemerken, die ich in diese Winkel mache. Wir haben nun hier (Fig. 59. u. 60.) in ADC und ABD zwey Dreyecke, wovon das eine zwey Winkel einzeln genommen so groß hat, als das andere. Was folgt hieraus für den dritten Winkel? K. Daß auch dieser in dem einen so groß seyn müsse als in dem andern.

L. Also $\angle$ D (Fig. 60.) ist so groß — ? K. Als $\angle$ C (Fig. 59.).

L. Dieses will ich wieder durch ein Paar Zeichen bemerken. Jetzt bedenkt, daß das Dreyeck DBC (Fig. 56.) hier in DBC (Fig. 61.) noch Ein Mahl verzeichnet ist, und sagt mir, was der Winkel B hier (Fig. 61.) für ein Winkel seyn muß. K. Auch ein rechter, weil es ja der Nebenwinkel von einem rechten ist.

L. Da ist also ∢ B im △ DBC (Fig. 61.) so groß, als ∢ B im △ ABD (Fig. 60.). Seht, ob ihr in DBC (Fig. 61.) nicht noch einen Winkel antrefft, der etwa einem von den drey Winkeln in ABD (Fig. 60.) gleich ist. K. Der Winkel C (Fig. 61.) muß gleich seyn dem ∢ D (Fig. 60.), weil dieser ∢ C (Fig. 61.) derselbe ist, welcher hier (Fig. 59.) mit C bezeichnet und dem ∢ D (Fig 60.) gleich ist.

L. Da haben wir also in dem Dreyecke DBC (Fig. 61.) zwey Winkel einzeln genommen, so groß, als in dem Dreyecke ABD (Fig. 60.). Was folgt nun nach einem unserer vor kurzem erwiesenen Lehrsätze hieraus? K. Daß die zwey Dreyecke ABD und BDC (Fig. 60. u. 61.) einander ähnlich seyn müssen.

L. Richtig! Um diese Wahrheit zu finden, mußten wir erst das Dreyeck ABD (Fig 60.) mit dem Dreyecke ADC (Fig. 59.) vergleichen, weil wir sonst nicht hätten erfahren können, daß der Winkel D (Fig. 60.) gleich ist dem ∢ C (Fig. 59). Und hätten wir dieß nicht gewußt, so hätten wir wieder nicht auf die Aehnlichkeit der vorhin genannten zwey Dreyecke schließen können. Da wir nun wissen, daß diese zwey Dreyecke hier (Fig. 60. u. 61.) oder, welches einerley ist, diese hier (Fig. 56.) einander ähnlich sind, so wissen wir auch, daß die Seiten, die gleiche Winkel einschließen, proportionirt seyn müssen. Ich will nun das Verhältniß AB : BD (Fig. 60.) anschreiben, schreibt ihr das gleiche Verhältniß dazu.

dazu. K. (schreiben gewöhnlich:) BC : BD (Fig. 61.)

L. Ihr habt dieß Mahl die Glieder eures Verhältnisses nicht recht geordnet, welches, wie ich vermuthe, seinen Grund in der verschiedenen Lage dieser beyden Dreyecke hat. So wie ich zuerst diejenige Seite, welche dem mit einem o bezeichneten Winkel gegen über steht, genannt habe, so müßt ihr auch von dem zweyten Dreyecke diejenige Seite, die dem mit einem o bezeichneten Winkel gegen über steht, zuerst nennen, weil sonst unsere Proportion nicht richtig wird. Ich will nur dem Dreyecke DBC (Fig. 61.) die nämliche Lage geben, welche das Dreyeck ABD (Fig. 60.) hat, dann werdet ihr die Sache besser einsehen. (Fig 62. verzeichnend)*) — So! Jetzt sprechen wir: AB verhält sich zu BD (auf diese Seite Fig. 60. zeigend), wie — ? K. DB : BC (auf diese Seiten Fig. 62 zeigend).

L. Jetzt ist die Proportion richtig. Nun betrachtet unsere zuerst verzeichnete Figur (Fig 56.) wieder, wo die nämlichen Seiten die hier unten (Fig. 60. und 61.) eine Proportion ausmachen, wieder vorkommen, nur mit dem Unterschiede, daß die Seite BD, die hier unten zwey Mahl verzeichnet ist, hier oben nur Ein Mahl vorkommt,

 weil

*) Manchen Kindern wird die Sache erst recht deutlich, wenn man das Dreyeck DBC (Fig. 61.) von Papier ausschneidet und es vor ihren Augen aus der Lage Fig. 61. in die Lage Fig. 62 bringt.

weil sie den zwey Dreyecken ABD und BDC gemeinschaftlich zugehört, sprecht dann die erst ausgesprochene Proportion noch Ein Mahl aus und zeigt dabey die Linien, die ihr jedes Mahl nennt. K. AB : BD = BD : BC (zugleich die rechten Linien (Fig. 56. zeigend).

L. Jetzt haben wir durch eine Reihe von Schlüßen auch bewiesen, daß die Linie BD die mittlere Proportionallinie zwischen den zwey gegebenen Linien AB = ab und BC = ac (Fig. 55.) seyn müsse, und ihr könnt daher vollkommen überzeugt seyn, daß ihr auf die vorhin angegebene Art zu jeden zwey gegebenen Linien die mittlere Proportionallinie finden könnt, wenn ihr anders dabey mit der gehörigen Accuratesse zu Werke geht. — Was wir jetzt bewiesen haben, will ich euch durch die Erfahrung bestätigen. Hier habe ich eine Proportion (3 : 6 = 6 : 12 anschreibend). Welches ist die mittlere Proportionalzahl? K. 6

L. Und die beyden äußersten Glieder dieser Proportion sind —? K 3 und 12.

L. Wenn ich nun eine gerade Linie von 3 und eine andere von 12 Zoll hätte, wie groß müßte die mittlere, zu diesen beyden gehörige, Proportionallinie seyn? K. 6 Zoll.

L. Hier Fig. 63.) ist in ab eine Linie von 3, und hier in cd eine von 12 Zoll. Sucht nun auf die euch bekannte Weise hiezu die mittlere Proportionallinie und seht, ob sie 6 Zoll mißt. K. (verzeichnen Fig. 57.)

Dergleichen Figuren kann man, zur Übung, mehrere verzeichnen lassen.

Neun und siebenzigster Satz.

Zusatz. 1.

L. Jetzt betrachtet diese Figur (Fig. 56.) wieder und sagt mir, wie die Linie A C heißen muß, da sie in einem rechtwinklichten Dreyecke dem rechten Winkel gegen über steht. K. Hypotenuse.

L. Wie steht denn die Linie B D auf der Hypotenuse? K. Senkrecht.

L. Von welchem Puncte aus ist denn diese senkrechte Linie auf die Hypotenuse gezogen? K. Von der Spitze des rechten Winkels aus.

L. In wie viel Theile ist die Hypotenuse durch diese senkrechte Linie zerschnitten worden? K. In zwey.

L. Welches ist denn zwischen diesen zwey Theilen die mittlere Proportionallinie? K. Die B D.

L. Nennt sie nicht mit Buchstaben, sondern beschreibt sie nach ihren Merkmahlen. K. Die von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse senkrecht gezogene Linie.

L. Gut! Was behaupten wir jetzt von der aus der Spitze dieses rechten Winkels auf die Hypotenuse senkrecht gezogenen Linie? K. Daß

sie die mittlere Proportionallinie sey zwischen den beyden Theilen der Hypotenuse, die durch sie abgeschnitten werden.

L. Da haben wir einen Zusatz zu unserm vorigen Lehrsatze gefunden. Wie wollt ihr wohl diesen ausdrücken? K. Die senkrechte Linie, welche man in einem rechtwinklichten Triangel aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse ziehen kann, ist die mittlere Proportionallinie, zwischen den beyden Theilen der Hypotenuse, worein sie durch diese senkrechte Linie zertheilt wird.

L. Hier ist ein rechtwinklichtes Dreyeck (dergleichen Figur verzeichnend). Könnt ihr mir nun geschwind drey Linien verschaffen, wovon eine die mittlere Proportionallinie zwischen den übrigen beyden ist? K. O ja.

L. Wie denn? K. Wenn wir aus der Spitze des rechten Winkels dieses rechtwinklichten Dreyecks eine senkrechte Linie auf die Hypotenuse ziehen.

L. Welches ist denn alsdann die mittlere Proportionallinie? K. Eben die senkrechte Linie, die wir ꝛc.

L. Und zwischen welchen beyden Linien ist diese senkrechte Linie die mittlere Proportionallinie? K. Zwischen den beyden Theilen der Hypotenuse, worein diese durch die erwähnte senkrechte Linie zerlegt wird.

L. Nun

L. Nun verschafft mir auf die angegebene Art, drey gerade Linien, wovon eine die mittlere Proportionallinie zwischen den übrigen beyden ist. —

Achtzigster Satz.

Zusatz. 2.

L. Jetzt sagt mir, wie die Linie A C (Fig 56.) in Rücksicht auf den Kreis, wovon ihr hier nur die Hälfte sehet, heißen muß? K. Durchmesser.

L. Wie steht denn die Linie B D auf dem Durchmesser dieses Kreises? K. Senkrecht.

L. In welcher Linie liegt denn der Punct, von wo aus diese senkrechte Linie auf den Durchmesser gezogen ist? K. In der Peripherie.

L. Da haben wir also in der BD eine von irgend einem Puncte in der Peripherie auf den Durchmesser senkrecht gezogene Linie. In wie viel Theile wird denn der Durchmesser durch diese senkrechte Linie zerschnitten? K. In zwey.

L. Welches ist denn zwischen diesen beyden Theilen des Durchmessers die mittlere Proportionallinie? K. Die von einem Puncte der Peripherie auf den Durchmesser gezogene senkrechte DB.

L. Was behaupten wir jetzt von der erst genannten Linie? K. Daß sie die mittlere Proportionallinie zwischen ꝛc.

L. Da haben wir einen zweyten, aus dem Beweise unsers letzten Lehrsatzes, folgenden Zusatz gefunden. Wie lautet dieser? K. Die aus einem beliebigen Puncte der Peripherie eines Kreises auf den Durchmesser desselben senkrecht gezogene Linie ist die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Theilen des Durchmessers, worein dieser durch diese senkrechte Linie zerlegt wird.

L. Jetzt könnt ihr noch auf eine zweyte Art in aller Geschwindigkeit drey Linien finden, wovon eine die mittlere Proportionallinie zwischen den übrigen beyden ist. Wer giebt mir diese Art an? K. Man beschreibt einen Kreis, und zieht aus einem beliebigen Puncte der Peripherie eine senkrechte Linie auf den Durchmesser.

L. Sucht einmahl auf diese Weise drey gerade Linien, wovon eine die mittlere Proportionallinie zwischen den übrigen beyden ist. K. (thun das Befohlne und sprechen die gefundene [stetige] Proportion aus.)

L. Jetzt sagt mir, wie lang die Linie AB (Fig. 56.) seyn müßte, wenn BD 4, und BC 8 Schuh lang wäre? K. Da müßte AB 2 Schuh lang seyn.

L. Aus welchem Grunde behauptet ihr dieses? K. Weil sich in dieser Figur AB zu BD wie BD zu BC verhalten muß. Wäre nun BD die Hälfte

von

von BC, so müßte ja auch AB die Hälfte von BD seyn.

L. Wie lang müßte denn aber die BC seyn, wenn die AB 4, und die BD 6 Schuh hielte? K. Neun Schuh.

L. Warum behauptet ihr dieses? K. Weil die BD in der BC eben so oft enthalten seyn muß, als die AB in der BD enthalten ist. Wenn nun die AB $1\frac{1}{2}$ Mahl in der BD enthalten wäre, so müßte auch diese in der BC $1\frac{1}{2}$ Mahl enthalten, die BC also 9 Schuh lang seyn, wenn die BD deren 6 hielte.

L., (welcher ein rechtwinklichtes Dreyeck, wie Fig. 59. verzeichnet, und von D eine senkrechte Linie DB auf AC gezogen hat.) Hier ist ein rechtwinklichtes Dreyeck und die Linie DB steht senkrecht auf der Hypotenuse.. Nun behaupte ich: Die AB ist in der BD $\frac{2}{3}$ Mahl, die BD aber in der BC $\frac{1}{2}$ Mahl enthalten. K. Das ist nicht möglich.

L. Warum nicht? K. Weil ja die BD die mittlere Proportionallinie zwischen der AB und BC seyn muß. u. s. w.

Ein und achtzigster Satz.

Lehrsatz.

L. Wer verzeichnet mir ein Dreyeck, in welchem zwey Seiten durch eine gerade Linie pro-

portionirt geschnitten werden? K. (verzeichnen Fig. 64. T. VIII. ABC mit der DE.)

L. Hier verhält sich also AD : DB wie —? K. AE : EC. (69ster S.)

L. Nun zieht mit der BC noch eine Linie parallel. K. (ziehen die FG.)

L. Könnt ihr mir wohl die Verhältnisse von AD und DF, AE und EG angeben? K. AD : DF = AE : EG.

L. Wie wollt ihr mir dieses beweisen? K. Die DE und die FG sind mit der BC parallel gezogen und müssen daher unter sich parallel seyn (44ster S. b.). Wenn wir nun AFG als ein Dreyeck betrachten, in welchem mit einer Seite eine Linie parallel gezogen ist, so müssen die übrigen beyden Seiten durch diese Linie proportionirt geschnitten werden.

L. Das ist richtig! Aber nun ist die Frage, wie sich die Stücke DF und FB, EG und GC zu einander verhalten? Denn die Figur DEBC ist kein Dreyeck, daß wir allenfalls den erst angeführten Satz auf sie anwenden könnten. — Um diese Frage beantworten zu können, müssen wir noch eine Hülfslinie und zwar von dem Puncte E auf die BC parallel mit der DB ziehen. — Was haben wir jetzt in Emc für eine Figur erhalten? K. Ein Dreyeck.

L. Sollten wohl die Seiten dieses Dreyecks durch die Linie nG auch proportionirt geschnitten werden? K. Allerdings.

L. Aus

L. Aus welchem Grunde behauptet ihr dieses? K. Weil nG mit mC parallel läuft.

L. Nun sagt, welches Verhältniß dem Verhältnisse En : nm gleich seyn muß. K. Das Verhältniß EG : GC.

L. Richtig. Behaltet dieß einstweilen und sagt mir, was DEnF für eine Figur seyn muß. K. Ein Parallelogramm, weil die gegenüberstehenden Seiten parallel laufen.

L. Da wißt ihr ja wohl auch wie sich die DF und En zu einander verhalten müssen. Wer sagt mir, wie? K. Sie müssen einander gleich seyn, weil es die gegen über stehenden Seiten eines Parallelogramms sind.

L. Der nämliche Fall ist auch bey der FB und nm, weil auch diese zwey Linien die gegenüberstehenden Seiten eines Parallelogramms sind. Vorhin hatten wir die Proportion EG : GC = En : nm. Jetzt können wir statt En : nm ein Paar andere, diesen gleiche, Größen setzen. Thut dieses, und sprecht dann die Proportion aus. K. EG : GC = DF : FB.

L. Allerdings! Und nun ist unsere vorige Frage beantwortet, und ihr wißt in welchem Verhältnisse DF und FB, EG und GC zu einander stehen. Jetzt sagt mir, ob auch dann zwey Seiten eines Dreyecks proportionirt geschnitten werden, wenn man innerhalb desselben mehrere Linien mit einer seiner Seiten parallel zieht. K. Allerdings.

L. Was

L. Was behauptet ihr jetzt? K. Daß auch dann die Seiten eines Dreyecks proportionirt geschnitten werden, wenn ꝛc.

L. Wer getraut sich wohl diesen Satz durch Hülfe dieser Figur (Fig. 65.) zu beweisen? K. (versuchen, den verlangten Beweis zu führen.)

L. Hier (Fig. 66.) habe ich ein Dreyeck verzeichnet, in welchem mehrere Linien mit einer seiner Seiten, nämlich mit KL parallel gezogen sind. Was könnt ihr nun von den durch diese Parallelen gemachten Abschnitten seiner übrigen beyden Seiten behaupten? K. Daß sie alle proportionirt seyn müssen.

L. Richtig! Und wollte jemand dieses nicht glauben, so könnten wir es ihm beweisen, wenn wir noch die Hülfslinien Em, Gn und Io zögen. Denn nun wäre

1) AD : DF = AE : BG — nach einem unserer vorigen Lehrsätze (69ster S.)

2) DF : FH = EG : GI
3) FH : HB = GI : IC
4) HB : BK = IC : CL

} nach unserm vorhin geführten Beweise.

Zwey und achtzigster Satz.

Aufgabe.

L. Gesetzt, die Theile der Linie AK (Fig. 66.) wären alle einander gleich, nämlich

AD = DF
DF = FH
FH = HB
HB = BK.

Was könntet ihr denn von den Theilen der Linie AL behaupten? K. Daß sie auch einander gleich seyn müßten.

L. Aus welchem Grunde könntet ihr dieses behaupten? K. Weil sich immer zwey dieser Theile gerade so zu einander verhalten, wie zwey durch die nämlichen Parallellinien gemachten Theile von AK. Wenn nun die Theile von AK alle einander gleich wären, so müßten ja auch die Theile von AL einerley Größe haben.

L. Das ist richtig! AK ist wirklich in fünf gleiche Theile eingetheilt, folglich muß auch AL in eben so viel gleiche Theile abgetheilt seyn. Jetzt lösche ich alle in diesem Dreyecke (Fig. 66.) gezogene Linien weg, und bemerke blos die Theilungspuncte D, F, H, B auf der AK. — So! Seyd ihr wohl jetzt im Stande die AL wieder in fünf gleiche Theile einzutheilen? K. Ja.

L. Wie wollt ihr es machen? K. Wir ziehen durch die Theilungspuncte D, F rc. Linien mit KL parallel bis an die AL.

L. Thut

L. Thut dieses. — So! Jetzt habt ihr wirklich die AL in fünf gleiche Theile eingetheilt. Nun will ich aber statt der AL diese Linie hier (die AM) ziehen und durch die KM das Dreyeck vollenden, übrigens außer der AK alles weglöschen. — Seyd ihr wohl jetzt im Stande, die AM auch in fünf gleiche Theile so gleich, ohne erst allerley Versuche zu machen, einzutheilen? K. Ja.

L. Welches Verfahren wollt ihr denn hiebey anwenden? K. Wir ziehen eben mit der KM Parallellinien durch die Puncte D, F rc., bis an die AM.

L. Thut dieses. — So! Jetzt würde eine von der vorigen AL verschiedene Linie in fünf gleiche Theile getheilt. Gesetzt, ich gäbe euch noch mehrere, theils längere, theils kürzere Linien, als die AM ist, könntet ihr diese wohl auch so leicht in fünf gleiche Theile theilen? K. Ja wohl.

L. Wie wolltet ihr denn dieß anfangen? K. Wir setzten sie unter einem beliebigen Winkel an die AK, verbänden dann beyder Endpuncte durch eine gerade Linie, daß wir ein Dreyeck bekämen, und zögen dann durch die Theilungspuncte D, F rc. gerade Linien parallel mit der Verbindungslinie bis an die zu theilende Linie.

L. Dieses Verfahren wäre richtig. Aber wie, wenn ich von dem Dreyecke AKM die AK weg-

lößchte, und euch gleichwohl den Auftrag gäbe, die AM in fünf gleiche Theile zu theilen, was wäre jetzt zu thun? K. —

L. Kommt wohl, wenn AM in lauter gleiche Theile getheilt werden soll, etwas darauf an, daß die AK, und also auch die Theile derselben eine bestimmte Länge haben, und jeder Theil etwa gerade $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ ꝛc. Zoll halte? K. Nein.

L. Und könnt ihr denn nicht auf eine angenommene Linie eine gewisse Anzahl gleicher Theile, deren Länge jedoch ganz willkührlich ist, tragen? K. O ja.

L. Also, wie lang die AK und ihre Theile sind, darauf kommt nichts an, wenn AM in fünf gleiche Theile getheilt werden soll; ihr könnt ferner auf jede gerade Linie 3, 4, 5, kurz jede beliebige Anzahl gleicher Theile von willkührlicher Länge tragen. Nun, sollte ich denken, könnt ihr mir gewiß die AM in fünf gleiche Theile theilen, wenn ich auch, wie ich jetzt thue, die AK und KM weglösche. Wer getraut sich den Versuch zu machen, mir aber auch zugleich zu sagen, wie er hiebey verfahren will? K. Ich setze bey A an die AM unter einem beliebigen Winkel eine gerade Linie von unbestimmter Länge, die AX heißen soll. Auf diese AX trage ich von A aus fünf gleiche Theile, deren Länge willkührlich ist, und ziehe dann von dem Endpuncte des letzten oder untersten Theiles bis an den Punct M, eine gerade Linie, die ich KM nennen will. Endlich ziehe ich auch durch die

Thei.

Theilungspuncte mit der KM parallel, die bis an die AM reichen.

L. Macht es so, und ihr werdet wirklich die gegebene Linie AM in fünf gleiche Theile theilen. — Nun seyd ihr gewiß im Stande, die Aufgabe: jede gegebene Linie in so viel gleiche Theile zu theilen, als man will, aufzulösen. Wer giebt mir das hiebey anzuwendende Verfahren an? K. Man trägt auf eine Linie von unbestimmter Länge, sie heiße AD (Fig. 67.), so viel gleiche Theile von willkührlicher Länge, als die zu theilende Linie haben soll. Dann wird, wenn die so eingetheilte Linie AB, und die zu theilende AC heißt, AB an AC unter einem beliebigen Winkel A gesetzt, beyder Endpuncte B und C werden durch eine gerade Linie, BC, mit einander verbunden und hierauf mit der BC Parallellinien durch die Theilungspuncte bis an AC gezogen.

L. Der Beweis von der Richtigkeit dieses Verfahrens ist eben der, womit der vorhergehende Lehrsatz bewiesen worden ist. Übrigens merkt, daß ihr gar nicht einmahl durch alle Theilungspuncte der einen Linie Parallelen zu ziehen nöthig habt. Denn wenn z. B. der Theil LC (Fig. 66.) gefunden ist, so darf man diesen nur auf der LA weiter tragen. — Jetzt wollen wir uns wieder ein bischen

chen im Auflösen der euch jetzt bekannt gewordenen Aufgabe üben. *)

Uibung!

L. Hier (Fig. 68.) habe ich einen Winkel, dessen Schenkel durch lauter Parallellinien geschnitten werden. Wißt ihr noch, wie sich je zwey und zwey dieser Parallellinien zu einander verhalten müssen? K. Wie die Abschnitte, die sie auf den Schenkeln machen. (73ster S.)

L. Die Abschnitte ab, bc, cd u.s.w. sind alle einander gleich, daher ist der Abschnitt ac noch Ein Mahl so lang, als der Abschnitt ab. Wie viel Mahl muß nun die Linie nc, die den Abschnitt ac macht, die Linie mb, welche den Abschnitt ab macht, in sich fassen? K. Auch zwey Mahl.

L. Richtig! Denn mb muß sich zu nc verhalten, wie ab : ac. Wie oft ist denn ab in ad enthalten? K. Drey Mahl.

L. Wie oft muß demnach mb in od enthalten seyn? K. Auch drey Mahl.

L. Frey-

*) Man lasse hier einige gegebene Linien durch bloßes wiederhohltes Versuchen in 5, 7 rc. gleiche Theile theilen, damit die Kinder von der Mühseligkeit dieses und von der Bequemlichkeit des oben gezeigten (geometrischen) Verfahrens recht überzeugt werden.

L. Freylich! Denn es muß seyn mb : od = ab : ad. Jetzt sagt mir doch, wie oft ab in al enthalten ist. K. 10 Mahl.

L. Wie oft muß also auch mb in vl enthalten seyn? K. Auch 10 Mahl.

L. Gesetzt nun, vl wäre einen Zoll lang, der wie vielste Theil von einem Zolle müßte so nach mb seyn? K. Der zehnte.

L. Wie viel Zehntel eines Zolles müßte aber nc halten? K Zwey.

L. Und od? K. Drey.

L. Und so gienge es fort,

pe wäre	= $\frac{4}{10}$		
qf —	= $\frac{5}{10}$		
rg —	= $\frac{6}{10}$	eines Zolles.	
sh —	= $\frac{7}{10}$		
ti —	= $\frac{8}{10}$		
uk —	= $\frac{9}{10}$		

Hieraus ergiebt sich noch eine zweyte Art, eine gegebene gerade Linie in so viel gleiche Theile zu theilen, als man will, oder: Linien zu finden, welche eine bestimmte Anzahl gleicher Theile einer gegebenen geraden Linie darstellen. Wer getraut sich wohl auf diese zweyte Art $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$ und so fort bis $\frac{11}{12}$ von dieser Linie hier (ab Fig. 69.) darzustellen, und mir dann sein dabey beobachtetes Verfahren gehörig zu beschreiben? K. (verzeichnen Fig. 69. und sprechen dann:) Unter einem beliebigen Winkel haben wir an den Punct b, der Linie ab eine gerade Linie von unbestimmter Länge ge-

setzt

setzt und auf dieselbe 12 willkührliche gleiche Theile von b nach c hin getragen. Hierauf haben wir die Linie a c, und dann mit a b eilf Parallelen durch die Theilungspuncte d, e, f u. s. w. gezogen.

L. Wenn nun die Linie a b ein rhein. Schuh wäre, wie viel Zoll hielte dann die Linie Z d? K. Eilf.

L. Welche Linie hielte aber nur einen Zoll? K. Die p o.

L. Welche hielte aber 2 Zoll? u. s. w. — Nun übt euch auch in dieser Art, eine gegebene gerade Linie in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen. —

Nun kann man, wenn man es für gut findet, die Kinder mit dem verjüngten Maßstabe bekannt machen, und sie selbst dergleichen verfertigen lehren. Bekanntlich ist die Construction desselben folgende:

Man ziehe eine gerade Linie A C (Tab. IX.) von unbestimmter Länge und trage mit der nöthigen Accuratesse von A nach B 10 willkührlich angenommene gleiche Theile, z. B. H F, F G, G H ꝛc. Die aus diesen 10 Theilen bestehende Linie A B trage man ferner noch so oft auf die Linie A C als es angeht. Hierauf errichte man aus den Endpuncten A B, X Y ꝛc senkrechte Linien von willkührlicher Länge und trage auf eine derselben z. B. auf A P, oder B S ebenfalls 10 ganz willkührlich angenommene gleiche Theile und ziehe durch die Theilungspuncte a, b, c, d, e, f, g, h, i mit aller möglichen Genauigkeit Linien parallel

lel*) mit der AC. Auf die oberste Linie PQ trage man von S aus nach R die nämlichen 10 gleichen Theile, worein die AB getheilt ist, so daß Sr = der BN werde u. s. w. Endlich verbinde man die Puncte SN, 1M, 2L, 3K, u. s. w. bis 9H durch gerade Linien mit einander, wodurch 10 Parallellinien, die schief auf AB stehen, erhalten werden, und der verlangte Maßstab ist fertig. Läßt man nun die Länge BX = AB eine Ruthe im Decimalmaße bedeuten, so ist die Länge BN Ein Schuh, und die Linie aq = 1 Zoll, br = 2 Zoll, cs = 3 Zoll u. s. w. Nähme man aber AB als einen Schuh an, so wäre NB = 1 Zoll, und aq = 1 Linie u. s. w. Denn da die Seite SB von dem Dreyecke NSB in 10 gleiche Theile getheilt, und durch die Theilungspuncte Parallelen mit der Grundlinie NB gezogen worden sind; so muß nach dem vorhin erwiesenen Satze oq = 1/10, br = 2/10, cs = 3/10 u. s. w. von NB seyn. Will man nun z. B. 3′, 5″, oder 7′ 9″ zwischen die Spitzen eines Zirkels fassen, so setze man im erstern Falle die eine Spitze in den Punct x und die andere in den Punct e, im letztern aber die eine Spitze in den Punct y, die andere in den Punct i ein. Denn durch die aus den Puncten S, 1, 2, 3, 4 u. s. w. gezogenen Parallelen ist jede der zwischen PS und AB liegenden gleichlaufenden Linien in 9 gleiche Theile, wovon jeder = NB ist, eingetheilt worden, und man kann daher die Schuhe nicht

*) Dieß geschieht am bequemsten entweder mit einem Parallellineale, oder dadurch, daß man auf CQ die nämlichen Theile trägt, die man auf AP oder BS getragen hat und dann durch die Theilungspuncte der AP (BS) und der CQ gerade Linien ziehen.

nicht blos auf AB oder PS, sondern auf jeder der mit AN gleichlaufenden Linien nehmen.

Drey und achtzigster Satz.

Lehrsatz.

L. Ehe wir weiter gehen können, muß ich euch erst wieder einen Satz aus der Rechenkunst bekannt machen. Er lautet also: Sind drey oder mehrere Verhältnisse einander gleich, so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede. Diese vier Verhältnisse z. B.

$$3 : 6$$
$$4 : 8$$
$$6 : 12$$
$$7 : 14$$

sind alle einander gleich, daher sich auch die Summe der Vorderglieder, nämlich 20, zur Summe der Hinterglieder = 40 verhält, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede. Denn

$$20 : 40 = 3 : 6.$$
$$20 : 40 = 4 : 8.$$
$$20 : 40 = 6 : 12.$$
$$20 : 40 = 7 : 14.$$

Diesen Satz mache man den Kindern durch mehr solche Beyspiele recht geläufig und verständlich.

L. Wenn ich euch sage, daß diese zwey Figuren (Fig. 70. u. 71.) einander ähnlich sind, so werdet

det ihr mir immer je zwey und zwey gleiche Winkel nennen können. Thut dieß. K. $\angle$ A und $\angle$ a, $\angle$ B und $\angle$ b, $\angle$ C und $\angle$ c u. s. w.

L. Könnt ihr mir auch ein Verhältniß angeben, welches dem Verhältnisse AB : BC gleich ist? K. ab : bc = AB : BC.

L. Warum haltet ihr diese zwey Verhältnisse für einander gleich? K. Weil in ähnlichen Figuren diejenigen Seiten, welche gleiche Winkel einschließen, alle Mahl der Ordnung nach proportionirt seyn müssen.

L. Schreibt mir einmahl alle die Proportionen in der Ordnung an, welche je zwey und zwey Seiten der einen dieser Figuren mit zwey ähnlich liegenden Seiten der andern machen. K. (schreiben die linke der folgenden Colonnen an:)

AB : BC = ab : bc	AB : ab = BC : bc
BC : CD = bc : cd	BC : bc = CD : cd
CD : DE = cd : de	CD : cd = DE : de
DE : EA = de : ea	DE : de = EA : ea
EA : AB = ea : ab	EA : ea = AB : ab.

L. Nun schreibt der ersten dieser Proportionen gegen über diejenige, welche entsteht, wenn ihr die beyden mittlern Glieder derselben (der ersten) mit einander verwechselt, und das Nämliche thut bey der zweyten, dritten, vierten und fünften. K. (schreiben die vorhergehende rechte Colonne an.)

L. Ihr seht nun, daß wir hier fünf Verhältnisse haben, nämlich

1) AB : ab
2) BC : bc
3) CD : cd
4) DE : de
5) EA : ea

und daß immer das nächstfolgende dem nächstvorhergehenden gleich ist, daß folglich diese Verhältnisse alle einander gleich seyn müssen. Jetzt sagt mir, wie sich bey mehrern gleichen Verhältnissen die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinderglieder verhält. K. Gerade so, wie ein Vorderglied zu seinem Hindergliede.

L. Gut! Die Summe der Vorderglieder dieser Verhältnisse macht den Umfang (Umring) der Figur ABCDE aus, und die Summe der Hinderglieder den Umfang der Figur abcde. Denn wenn wir die Seiten AB, BC, CD ꝛc. mäßen, und die gefundenen Zahlen in eine Summe brächten; so würden wir erfahren, wie viel Schuh ꝛc. der Umfang dieser Figur beträgt. Das Nämliche wäre der Fall, wenn wir es mit den Seiten ab, bc, cd ꝛc. so machten. Ein Vorderglied dieser unserer Verhältnisse zeigt aber alle Mahl eine Seite der einen, und ein Hinderglied eine ähnlich liegende Seite der andern Figur an. Wenn ihr nun das jetzt Gesagte zusammen nehmt, so könnt ihr mir vielleicht sagen, wie sich die Umringe von zwey ähnlichen Figuren zu einander verhalten. K. Gerade wie zwey ihrer ähnlich liegenden Seiten.

L. Richtig! Faßt nun, was ihr jetzt gelernt habt, in einen Satz zusammen und sprecht ihn aus.

 K. Sind

K. Sind zwey Figuren einander ähnlich, so verhalten sich ihre Umringe, wie zwey ihrer ähnlich liegenden Seiten.

L. Diesen Satz will ich euch wieder durch die Erfahrung bestätigen. Hier (Fig. 72 u. 73.) sind zwey ähnliche Figuren, deren Seiten alle in gleiche Theile eingetheilt sind. Der Umfang der kleinern enthält 18 Zoll, so wollen wir diese Theile nennen, und der Umfang der größern 27 Zoll. Nun nehmt zwey ähnlich liegende Seiten, welche ihr wollt, so werden sie sich immer zu einander verhalten, wie die erst ausgesprochenen beyden Zahlen.

Denn AB = 6 Zoll : ab = 4 Zoll = 27 : 18
BC = 9 Z. : bc = 6 Z. = 27 : 18
CA = 12 Z. : ca = 8 Z. = 27 : 18

Eben so finden wir bey diesen zwey ähnlichen Figuren (Fig. 74. u. 75.), daß sich ihre Umringe gerade so, wie zwey ihrer ähnlich liegenden Seiten zu einander verhalten. Denn der Umfang der kleinern beträgt 24, der der größern 48 unserer Zolle. Nun ist aber

24 : 48 = ab (= 5 Z.) : AB (= 10 Z.)
24 : 48 = bc (= 8 Z.) : BC (= 16 Z.)
24 : 48 = cd (= 6 Z.) : CD (= 12 Z.)
24 : 48 = da (= 5 Z.) : DA (= 10 Z.)

Vier und achtzigster Satz.

Lehrsatz.

L. Ich habe jetzt Diagonalen aus gleichen Winkeln in diesen beyden einander ähnlichen Figuren gezogen, wodurch jede derselben in drey Dreyecke zerfällt worden ist. Es entsteht nun die Frage: Ist jedes Dreyeck in der einen dieser Figuren einem Dreyecke in der andern ähnlich oder nicht? Vergleicht einmahl die Dreyecke EAB und eab mit einander und seht, ob ihr keines der Merkmahle der Aehnlichkeit zweyer Dreyecke an ihnen entdecken könnt. K. Da diese zwey Figuren einander ähnlich sind und folglich gleiche Winkel und proportionirte Seiten haben, so ist $\angle A = \angle a$, und $EA : AB = ea : ab$, daher auch $\triangle$ EAB ähnlich dem $\triangle$ eab.

L. Von einem Paare dieser Dreyecke ist also die Aehnlichkeit dargethan. — Jetzt vergleicht die Dreyecke EDC und edc mit einander und seht, ob diese nicht auch einander ähnlich sind. K. $\angle D = \angle d$ und $ED : DC = ed : dc$, weil beyde Fünfecke einander ähnlich sind; folglich müssen auch die Dreyecke EDC und edc einander ähnlich seyn.

L. Da haben wir also auch die Aehnlichkeit des zweyten Paares dieser Dreyecke erwiesen. Jetzt sagt mir, welcher von den Winkeln U und v der größere ist. K. Da die Dreyecke EAB und eab einander ähnlich sind, so müssen diese zwey Winkel einander gleich seyn.

L. Auch die Winkel ABC und abc oder B und b sind einander gleich, weil beyde Fünfecke einander ähnlich sind. Wenn wir nun U von B, und v von b, also Gleiches von Gleichem abziehen, so bleiben gleiche Reste. Welches sind hier die gleichen Reste. K. Die Winkel w und x.

L. Seht doch, ob nicht auch die Winkel Z u. n einander gleich sind. K. $\angle$ y muß wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke EDC und edc äqual $\angle$ m, und $\angle C = \angle c$ seyn, folglich müssen in den Winkeln Z und n gleiche Reste übrig bleiben, wenn wir y von C und m von c abziehen.

L. Da sind demnach im $\triangle$ EBC zwey einzelne Winkel, nämlich W und Z so groß als die zwey einzelnen Winkel n und x im $\triangle$ ebc. Was folgt hieraus? K. Daß beyde Dreyecke einander ähnlich seyn müssen.

L. Von diesen zwey ähnlichen Figuren hätten wir also erwiesen, daß sie sich durch Diagonalen aus gleichen Winkeln in ähnliche Dreyecke zerlegen lassen. Und da die nämliche Art zu schließen, die wir jetzt angewendet haben, bey allen ähnlichen Polygonen Statt finden kann; so können wir den Lehrsatz aufstellen: Alle ähnliche Figuren können durch Diagonalen aus gleichen Winkeln, oder, was eben so viel ist, durch ähnlich liegende Diagonalen, in ähnliche Dreyecke zerlegt werden.

Fünf

Fünf und achtzigster Satz.

Zusatz.

L. Da wir erst erwiesen haben, daß △ EDC (Fig. 70.) ähnlich ist dem △ edc (Fig. 71.), so muß sich auch verhalten DE : EC = de : ec. Jetzt macht aus dieser Proportion durch Verwechslung der beyden mittlern Glieder eine andere und schreibt sie an. K. (schreiben:) DE : de = EC : ec.

L. Wir wollen der Bequemlichkeit wegen den Umfang des größern Fünfecks P, und den des kleinern p nennen, und folgende Proportion anschreiben: P : p = DE : de, welches mit Worten vollständig ausgedrückt heißt — ? K. Der Umfang des größern Fünfecks verhält sich zum Umfange des kleinern Fünfecks, wie die Seite DE zur Seite de.

L. Und daß dem so sey, haben wir kürzlich erwiesen (83ster S.). Vorhin sahen wir, daß das Verhältniß EC : ec gleich ist dem Verhältnisse DE : de; jetzt behaupten wir, daß auch das Verhältniß P : p gleich sey dem Verhältnisse DE : de. Was folgt hieraus? K. Daß auch das Verhältniß P : p gleich seyn müsse dem Verhältnisse EC : ec, daß also P : p = EC : ec.

L. Was heißt das mit andern Worten? K. Der Umfang des größern Fünfecks verhält sich zu dem Umfange des kleinern Fünfecks, wie die Diagonale EC zur Diagonale ec.

L. We-

L. Wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke ECB und ecb verhält sich auch EC : ec = EB : eb. Da nun sowohl das Verhältniß P : p, als auch das Verhältniß EB : eb dem Verhältnisse EC : ec gleich ist, so folgt — ? K. Daß auch P : p = EB : eb.

L. Vorhin hatten wir P : p = EC : ec und jetzt haben wir P : p = EB : eb das heißt mit Worten allgemein ausgedrückt: Die Umringe (Perimeter) ähnlicher Figuren verhalten sich zu einander, wie alle Diagonalen, die aus gleichen Winkeln gezogen werden. Ihr könnt nun auf eine zweyfache Art erfahren, wie sich die Umringe dieser zwey (Fig. 74. 75.) ähnlichen Figuren zu einander verhalten. Wer giebt mir diese zweyfache Art an? K. Erstlich, wenn man zwey ähnlich liegende (gleichnamige) Seiten dieser Figuren mißt und sieht, wie oft die eine in der andern enthalten ist; zweytens, wenn man Diagonalen aus gleichen Winkeln zieht, und dieser Verhältniß zu einander durch gehöriges Messen erforscht.

L. Sucht einmahl auf diese doppelte Art das Verhältniß, worin die Umringe dieser zwey Figuren zu einander stehen. K. (ziehen 1) die Diagonalen ac und AC und finden durch Messen, daß erstere in der letztern zwey Mahl enthalten ist, 2) messen sie zwey ähnlich liegende Seiten und finden, daß immer die kleinere die Hälfte der größern ist.)

L. Jetzt

L. Jetzt will ich einmahl die Vordersätze zu einem Schluße geben, und sehen, ob ihr den Schlußsatz finden könnt. Die Umringe zweyer ähnlichen Polygone verhalten sich zu einander, wie ihre ähnlich liegenden Diagonalen; Kreise sind im Grunde nichts anders, als ähnliche Polygone. K. Also müssen sich die Umringe (Peripherien) zweyer Kreise zu einander verhalten, wie ihre ähnlich liegenden Diagonalen.

L. Aehnlich liegende Diagonalen in Kreisen sind nichts anders, als ihre Durchmesser, weil man sich diese als aus gleichen Winkeln gezogen denkt. Daher können wir die letzte Hälfte dieses Schlußsatzes noch etwas anders ausdrücken. Wer weiß, wie? K. Die Peripherien zweyer Kreise verhalten sich zu einander, wie ihre Durchmesser.

L. Und da die Hälften sich eben so zu einander verhalten wie die Ganzen, so kann man auch sagen: die Peripherien zweyer Kreise verhalten sich zu einander wie ihre Halbmesser. Ein Paar Beyspiele sollen euch diesen Satz bestätigen. Der Durchmesser dieses Kreises (einen Kreis beschreibend, dessen Durchmesser = 12 Zoll angenommen wird,) hält 12 Zoll. Sucht nun seine Peripherie. K. (finden die Peripherie 37'', 6''', 8'''', oder 3768''''.)

L. Jetzt sucht auch die Peripherie dieses Kreises, dessen Durchmesser 6 Zoll hält. K. (finden die Peripherie = 18'', 8''', 4'''', oder 1884''''.)

L. Seht

L. Seht nun, wie oft 1884 in 3768 enthalten ist. K. finden das $\frac{3768}{1884} = 2$ ist.)

L. Nach dieser Rechnung ist der Umfang (die Peripherie) des kleinern dieser Kreise im Umfange des größern gerade zwey Mahl enthalten. Eben so oft ist aber auch der Durchmesser des kleinern = 6 Zoll im Durchmesser des größern = 12 Zoll begriffen. Dieß Beyspiel bestätigt also unsern vorhin aufgestellten Satz.

Man lasse hier noch einige dergleichen Exempel ausrechnen.

L. Jetzt denkt euch einen Kreis A, dessen Durchmesser 6 Zoll, und einen Kreis B, dessen Durchmesser 9 Zoll hat, und sagt mir, wie oft die Peripherie von A in der Peripherie von B enthalten ist. K. $1\frac{1}{2}$ Mahl.

L. Warum glaubt ihr dieses? K. Weil der Durchmesser von A $1\frac{1}{2}$ Mahl in dem Durchmesser von B enthalten ist, und sich die Peripherien der Kreise zu einander verhalten, wie ihre Durchmesser.

L. Gut! Wir wollen annehmen, ein Büttner brauche zu einem gewissen Faße 12 gleich breite Dauben, wie viel Dauben von der nämlichen Breite braucht er, zu einem andern, dessen Durchmesser um $\frac{1}{3}$ größer ist als das erstere? K. Sechzehn.

L. Wie seyd ihr auf diese Antwort gekommen? K. Wir haben gedacht: ein Faß dessen Durchmesser um $\frac{1}{3}$ größer ist, als ein anderes, hat

hat auch $\frac{1}{3}$ mehr im Umfange als das andere: und da zum kleinern 12 Dauben erfordert werden, so braucht man zum größern Ein Mahl 12 und $\frac{1}{3}$ Mahl 12 Dauben, welches zusammengenommen 16 Dauben macht.

L. Ein Gärtner pflanzt um einen kreisrunden Platz Bäume und braucht deren 18. Er will einen andern ähnlichen Platz, dessen Durchmesser aber um $\frac{1}{6}$ größer als der Durchmesser des erstern ist, auch so mit Bäumen einfassen, die unter sich in der nämlichen Entfernung von einander stehen sollen: wie viel braucht er Bäume? K. Ein Sechstel mehr als beym erstern Platze, also 21.

L. Wie habt ihr diese Antwort gefunden? K. Wir haben gedacht: ein kreisförmiger Platz, dessen Durchmesser um $\frac{1}{6}$ größer ꝛc.

L. Ein Schmid braucht zu einem eisernen Reif, dessen Durchmesser 5 Schuh beträgt 20 ℔. Eisen, wie viel von diesem Metalle braucht er zu einem Reife, der 6 Schuh im Durchmesser hat? K. Ein Mahl 20 und $\frac{1}{5}$ Mahl 20 zusammen, also 24 ℔.

L. Wie habt ihr diese Antwort gefunden? K. Wir ꝛc.

L. Zur Einzäunung eines kreisförmigen Platzes, der 8 Schuh im Durchmesser hat, braucht man 200 Latten. Wie viel Latten sind nöthig, um einen runden Platz, der 12 Schuh im Durchmesser hat, eben so einzuzäunen? K. 300 Latten.

L. Wie habt ihr diese Antwort gefunden? K. Wir rc.

Sechs und achtzigster Satz.

Lehrsatz.

L. Ihr habt vorhin (gestern) die Peripherien dieser zwey Kreise (der beym vorigen Satze verzeichneten) gefunden: sucht mir nun auch ihren Flächeninhalt. K. (finden auf die oben gezeigte Art den Flächeninhalt des größern (A) = 11304 □'''' und den Flächeninhalt des kleinern (B) = 2826 □''''.

L. Jetzt seht, wie oft der Flächeninhalt von B in dem Flächeninhalte von A enthalten ist. K. (finden $\frac{11304}{2826} = 4$.)

L. Nach dieser Rechnung, die ganz richtig ist, ist der Kreis A vier Mahl so groß als der Kreis B. Jetzt sucht einmahl die Quadratzahlen der Durchmesser dieser beyden Kreise. K. (finden $12 \times 12 = 144$; und $6 \times 6 = 36$.)

L. Das auf dem Durchmesser D E errichtete Quadrat würde also 144, das auf dem Durchmesser d e errichtete aber nur 36 Quadratzoll enthalten. Nun seht doch, wie oft das kleinere dieser Quadrate in dem größern enthalten ist. K. (finden $\frac{144}{36} = 4$.)

L. Wie

L. Wie viel Mahl ist demnach das Quadrat des Durchmessers ed in dem Quadrate des Durchmessers ED enthalten? K. Vier Mahl.

L. Vorhin sahen wir, daß der Flächenraum von B vier Mahl in dem Flächenraume von A enthalten ist; und jetzt haben wir gefunden, daß die Quadrate der Durchmesser dieser zwey Kreise in dem nämlichen Verhältnisse zu einander stehen. Giebt uns das keine Proportion? K. Ja.

L. Wie lautet sie? K. Der Flächenraum des Kreises B verhält sich zum Flächenraume des Kreises A, wie das Quadrat des Durchmessers des Kreises B zum Quadrate des Durchmessers des Kreises A.

L. Das heißt kurz: die Flächen dieser zwey Kreise verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Durchmesser. Dieß ist aber nicht bloß der Fall bey diesen zwey, sondern bey allen möglichen Kreisen, wie dieß durch einen Beweis, den ich, weil er für euch zu schwer ist, hier übergehe, dargethan werden kann. Deswegen können wir nicht bloß von unsern zwey, sondern von allen Kreisflächen behaupten, daß sie sich zu einander verhalten, wie die Quadrate ihrer Durchmesser. Einige Zeichnungen werden euch dieses wenigstens wahrscheinlich machen. Hier (von Tab IX. die vier ersten Kreise verzeichnend) sind vier Kreise, wovon jeder in das Quadrat seines Durchmessers beschrieben ist. Daß aber das Quadrat A z. B. wirklich das Quadrat des Durchmessers ab sey, erhellet daraus, weil

ich die Seite cd parallel mit dem Durchmesser ab gezogen habe und diese zwey Linien zu beyden Seiten von Parallelen begränzt werden, folglich, wie ihr schon längst gelernt habt, einander gleich seyn müssen. Der nämliche Fall findet auch bey jedem der folgenden Quadrate Statt. Wenn wir nun den Durchmesser ab einen Schuh nennen, so ist das Quadrat A ein Quadratschuh, und nach diesem Maßstabe hält das Quadrat B 4, das Quadrat C 9, das Quadrat D 16 Quadratschuh, weil der Durchmesser von B zwey Mahl, der von C drey Mahl, und der von D vier Mahl so lang ist, als der von A. Nun sagt, was sich aus dem Umstande, daß ich zum Umschließen des Kreises B ein vier Mahl so großes Quadrat brauche, als zum Umschließen des Kreises A, muthmassen läßt. K. Daß der Kreis B wohl vier Mahl so groß als der Kreis A seyn möge.

L. Gut! Und was läßt sich daraus muthmassen, daß ich zum Umschließen des Kreises C ein neun Mahl so großes Quadrat brauche, als zum Umschließen des Kreises A? K. Daß der Kreis C auch wohl neun Mahl so groß ꝛc.

L. Und da das Quadrat, welches den Kreis D umgiebt, ohne dabey größer zu seyn, als nöthig ist, ihn gerade einzuschließen, 16 Mahl so groß seyn muß, als das Quadrat, worein der Kreis A beschrieben ist: so ist wahrscheinlich — ? K. Daß der Kreis D auch 16 Mahl so groß als der Kreis A sey.

L. Ihr

L. Ihr seht nun, daß diese Zeichnungen wenigstens wahrscheinlich machen, was man durch andere Gründe zur Gewißheit erheben kann, daß sich nämlich die Kreisflächen zu einander verhalten — ? K. Wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

L. Denkt euch jetzt zwey Kreise, A und B genannt. Der Durchmesser von A mißt 5, der von B aber 8 Schuh. Nun sagt mir, wie oft die Kreisfläche A in der Kreisfläche B enthalten seyn muß. K. $2\frac{14}{25}$ Mahl.

L. Wie habt ihr dieß gefunden? K. Wir haben gedacht: Kreise verhalten sich zu einander, wie ꝛc. Nun hält das Quadrat des Durchmessers von A 25, das Quadrat des Durchmessers von B aber 64 Quadratschuh. 25 ist aber in 64 $2\frac{14}{25}$ Mahl enthalten, folglich ꝛc.

L. Nun könnt ihr mir ja wohl sagen, was ihr immer zu thun habt, wenn ihr erforschen wollt, in welchem Verhältnisse zwey Kreise zu einander stehen. Sagt mir dieß. K. Da müssen wir ihre Durchmesser messen, beyder Quadrate suchen, und dann sehen, wie sich diese zu einander verhalten. —

L. Nun wollen wir uns ein bischen im Aufsuchen des Verhältnisses, worin immer zwey Kreise zu einander stehen, üben. Zu dem Ende will ich diese Kupfertafel (Tab. IX.) hier, worauf mehrere Kreise mit in Schuhe abgetheilten Durchmesser verzeichnet sind, befestigen, und eines nach dem andern sagt mir, aber mit Hinzufügung der Gründe seiner Behauptung, wie sich immer die zwey Kreise, die

ich nennen werde, zu einander verhalten. Der Kreis A und der Kreis E. K. Der Kreis A muß in dem Kreise E 25 Mahl enthalten seyn, weil das Quadrat des Durchmessers von A, der äqual 1 Schuh angenommen ist, 25 Mahl in dem Quadrate des Durchmessers von E, der 5 Schuh hält, enthalten ist, und Kreise sich zu einander verhalten, wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

L. Der Kreis A und der Kreis F. K. Der Kreis A ist in dem Kreise F 36 Mahl enthalten, weil ꝛc.

So wird der Kreis A noch mit G, H, I und K, dann der Kreis B mit jedem der folgenden, dann C mit jedem der folgenden u. s. w. verglichen.

L. Nun will ich euch noch einige Sätze zur Beurtheilung vorlegen. Jemand hat zwey kreisförmige eiserne Platten, die durchaus von einerley Dicke sind. Die erste welche Einen Schuh im Durchmesser hält, wiegt 5 ℔., die zweyte, deren Durchmesser noch Ein Mahl so groß, also zwey Schuh lang ist, muß daher noch Eiu Mahl so viel, also 10 ℔. wiegen. K. Das kann nicht seyn.

L. Warum nicht? K. Da die zweyte Platte vier Mahl so groß als die erste ist: so muß sie ja vier Mahl so viel, also 20 ℔. wiegen.

L. Gut! Hört weiter! Ein Büttner braucht, um einen Faßboden, der zwey Schuh im Durchmesser hat, mit Pech zu überziehen, 3 ℔. von diesem Material. Demnach braucht er zur Uiberziehung eines andern Faßboden, dessen Durchmesser

drey

drey Schuh hält, 9 ℔. Pech. K. Er braucht nur $6\frac{3}{4}$ ℔., weil der zweyte Faßboden nur $2\frac{1}{4}$ Mahl so groß als der erste ist.

L. Zu einem kreisförmigen im Durchmesser 5 Schuh haltenden Deckel auf irgend ein Gefäß braucht man fünf Mahl so viel Holz, als zu einem andern, der nur Einen Schuh im Durchmesser hält. K. Bewahre! Man braucht zu einem Deckel der 5′ im Durchmesser hält, 25 Mahl so viel Holz, als etc.

L. Ein Vergolder braucht zur Vergoldung einer kreisförmigen Fläche, die 9 Zoll im Durchmesser hat, 16 Goldblättchen von einerley Größe. Demnach braucht er zur Vergoldung einer andern ähnlichen Fläche, die aber nur 6 Zoll im Durchmesser hat, $10\frac{2}{3}$ von den nämlichen Goldblättchen.

Sieben und achtzigster Satz.

Lehrsatz.

L. Hier (Fig. 2. b. Tab. II.) ist ein rechtwinklichtes Dreyeck, wovon jede Seite der Durchmesser eines Kreises ist. Nun entsteht die Frage, wie sich der größte dieser Kreise zu den beyden übrigen zusammen genommen verhält. Ihr werdet diese Frage beantworten können, so bald ihr euch wieder erinnert, in welchem Verhältnisse das Quadrat der Hypotenuse zu den Quadraten der beyden Katheten zusammen genommen steht. Wer weiß

ieß noch? K. Das Quadrat der Hypotenuse ist gleich ꝛc.

L. Und wie verhalten sich Kreisflächen zu einander? K. Wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

L. Nun könnt ihr mir ja wohl auch sagen, wie sich der Kreis hier, der die Hypotenuse zum Durchmesser hat, zu den übrigen beyden verhalten muß. K. Er muß so groß seyn, als diese zusammen genommen.

L. Aus welchem Grunde kann man wohl dieses behaupten? K. Weil sich Kreisflächen wie die Quadrate ihrer Durchmesser zu einander verhalten, und das Quadrat der Hypotenuse alle Mahl so groß ist, als die Quadrate der beyden Katheten zusammen genommen.

L. Gut! Hieraus seht ihr, daß der oben erwiesene so genannte Pythagorische Lehrsatz nicht bloß von Quadraten, sondern auch von Kreisen gilt*), und daß wir auch behaupten dürfen: Ein auf der Hypotenuse beschriebener Kreis ist so groß, als die auf den beyden Katheten beschriebenen zusammen genommen. Da ihr dieses wißt, so könnt ihr nun eben so leicht zwey und mehrere Kreise in einen einzigen verwandeln, als ihr zwey und mehrere Quadrate in ein einziges verwandeln könnt. Wir wollen einmahl einen Versuch anstellen. Hier (Fig. 2. c. Tab. II.) sind zwey Kreise, die in einen einzigen ver-

*) Er gilt überhaupt von allen ähnlichen Figuren.

verwandelt werden sollen. Oder: es soll ein Kreis beschrieben werden, welcher so groß ist, als diese zwey zusammen genommen. Wie ist dieß anzufangen? K. Wir stellen die Durchmesser der beyden gegebenen Kreise rechtwinklicht zusammen, ziehen dann die Hypotenuse und beschreiben aus der Mitte derselben einen Kreis, der sie (die Hypotenuse) zum Durchmesser hat.

L. Macht es einmahl so. K. (verzeichnen (Fig. 2. d. Tab. II.)

L. Der von euch beschriebene Kreis ist nun so groß, als — ? K. Diese zwey gegebenen zusammen genommen.

L. Da die zwey gegebenen einander gleich sind, so ist also der von euch auf der Hypotenuse beschriebene doppelt so groß, als einer der gegebenen.

So wie in der ersten Hälfte dieses Bändchens S. 220 f. die Kinder angeleitet worden sind, ein Quadrat zu verzeichnen, welches 2, 3, 1 1/4, 1/2 ꝛc. Mahl so groß als ein gegebenes war; so werden sie hier angeleitet, einen Kreis zu beschreiben, welcher zu einem gegebenen das nämliche Verhältniß hat, das jene Quadrate zu einander hatten. Die Linien, welche die Durchmesser der verlangten Kreise abgeben, werden ganz auf die nämliche Art gefunden, wie die Linien, welche Seiten zu den am angeführten Orte verlangten Quadraten gaben. Soll z. B. ein Kreis beschrieben werden, der 1 1/4 Mahl so groß, als ein gegebener ist, so wird wie Fig. 57. Tab. III. d. erst. H. verfahren. Es werden nämlich der Durch- und Halbmesser des gegebenen Kreises rechtwinklicht an einander gesetzt, dann wird,

wenn EB (Fig. 57. Tab. III. der erst. H.) äqual dem Durchmesser des gegebenen Kreises wäre, die Hypotenuse EF gezogen und ein Kreis beschrieben, der diese EF zum Durchmesser hat.

Acht und achtzigster Satz.

Lehrsatz.

L. Wie groß ist wohl der Flächeninhalt dieses Kreises (Fig. A Tab. IX), wenn sein Durchmesser = 1 Schuh angenommen wird? K. rechnen:

100 : 314 = 1

100| 3|14| und finden dadurch die Peripherie = 3', 1'', 4''', oder 314'''. Diese Zahl mit dem vierten Theile des ebenfalls in Linien ausgedrückten Durchmessers multiplicirt giebt folgende Rechnung:

$$\begin{array}{r} 314''' \\ 25''' \\ \hline 1570 \\ 628 \\ \hline 7850\ \square'''. \end{array}$$

L. Dieser Kreis hält also 7850 Quadratlinien. Nun sagt, wie viel Quadratlinien das Quadrat des Durchmessers dieses Kreises enthalten muß. K. Da dieses Quadrat als ein Quadratschuh angenommen wird, und der Quadratschuh 100 Quadratzoll, ein Quadratzoll aber 100 Quadratlinien hält;

hält; so muß das Quadrat des Durchmessers dieses Kreises 10000 Quadratlinien halten.

L. Da verhält sich also die Kreisfläche A zu dem Quadrate ihres Durchmessers wie 7850 zu 10000, oder, wenn wir beyde Zahlen mit 10 dividiren, wodurch ihr Verhältniß zu einander nicht geändert wird*), wie 785 : 1000. Da wir nun diese beyden Verhältnißzahlen alle Mahl finden, wenn wir den Durchmesser eines Kreises = 1, es sey nun dieß eine Ruthe, ein Schuh etc. annehmen; so spricht man überhaupt: Die Kreisfläche verhält sich zu dem Quadrate ihres Durchmessers wie 785 : 1000. Jetzt sagt mir, wie viel der vierte Theil von 1000 beträgt. K. 250.

L. Und drey Mahl der vierte Theil von 1000? K. 750.

L. Jetzt könnt ihr mir sagen, ob die Kreisfläche mehr oder weniger, als $\frac{3}{4}$ von dem Quadrate ihres Durchmessers in sich faßt. Sagt mir dieß. K. Sie faßt mehr in sich.

L. Wie viel beträgt aber dieser Uiberschuß? K. $\frac{35}{1000}$.

L. Wie viel erhalten wir, wenn wir diesen Bruch noch mit 5 aufheben? K. $\frac{7}{200}$.

 L. Nach

*) Man zeige hier, wenn es nöthig seyn sollte, durch einige Beyspiele, daß das Verhältniß, worin zwey Zahlen zu einander stehen, nicht geändert wird, wenn beyde mit einerley Divisor dividirt werden.

L. Nach dieser Rechnung enthält also die Kreisfläche $\frac{3}{4}$ + $\frac{7}{100}$ oder — wenn beyde Brüche unter einerley Nenner gebracht werden — $\frac{157}{200}$ (= $\frac{785}{1000}$) von dem Quadrate ihres Durchmessers. Um euch diese Sache noch deutlicher zu machen, habe ich diese Zeichnung (Tab. XI.) verfertigt. Hier ist ein Kreis und um ihn das Quadrat seines Durchmessers beschrieben. Letzteres ist in 20 gleiche Theile, und einer davon, nämlich der 16te von A an gerechnet, wieder in Zehntel abgetheilt. Denken wir uns nun die übrigen 19 dieser größern Theile eben so eingetheilt, wie ich diesen einzigen hier eingetheilt habe, so enthält das ganze Quadrat 200 solche kleine Rechtecke, dergleichen ihr hier 10 seht. Wenn wir nun diese gedachten kleinen Rechtecke von A bis hieher, wo die Ziffer 7 steht, zählen; so haben wir deren 157, und jedes davon ist der zweyhundertste Theil vom ganzen Quadrate. Diese 157 kleinen Rechtecke, die das größere Rechteck A 7 f D bilden, nehmen nun nach unserer vorigen Rechnung den nähmlichen Flächenraum ein, welchen der in dieses Quadrat beschriebene Kreis einnimmt. Folglich betragen die außerhalb der Peripherie des Kreises liegenden Ecken dieses Quadrats gerade 43 solche kleine Rechtecke, wie diese hier (das 16te Rechteck zeigend) sind. — — Nun merkt noch folgendes: Durch die Verhältnißzahlen 1000 : 785 werden wir in den Stand gesetzt, den Inhalt der Kreisfläche noch auf eine andere, als die oben gezeigte, Art zu finden. Denn nun dürfen wir nur urtheilen: Wenn das Quadrat des Durchmessers

1000 Quadratlinien, oder Quadratzoll ꝛc. hielte: so würde die Kreisfläche deren 785 halten; wie groß muß demnach die Kreisfläche seyn, wenn das Quadrat des Durchmessers so oder so viel Quadratlinien ꝛc. hält? Oder: wie sich verhält 1000 : 785, eben so muß sich das Quadrat des Durchmessers irgend eines gegebenen Kreises zu seinem Flächeninhalte verhalten, und wir dürfen also nur zu 1000 : 785 und der Quadratzahl des Durchmessers eines gegebenen Kreises die vierte Proportionalzahl suchen. Hätten wir z. B. einen Kreis, dessen Durchmesser 6 Schuh lang wäre, so daß also das Quadrat dieses Durchmessers 36 □′ enthielte; so würden wir seinen Flächenraum auch durch folgende Rechnung finden können:

$$1000 : 785 = 36$$

$$\begin{array}{r} 785 \\ 36 \\ \hline 4710 \\ 2355 \\ \hline 1000)\ 28|260 \end{array}$$

das heißt: der gesuchte Flächenraum beträgt

28 □′, u. $\frac{260}{1000}$ od. $\frac{26}{100}$ ein. Quadratsch. = 26 □″.

Daß dieses die nämliche Zahl sey, die wir auch finden, wenn wir den Flächeninhalt des gegebenen Kreises auf die oben angegebene Art suchen, lehrt folgende Rechnung.

$$100 : 314 = 6'$$

$$\begin{array}{r} 314 \\ 6 \\ \hline 100)\ 18|84 \end{array}$$

d. h. Periph. = 18′, 8″, 4‴ oder 1884‴.
Diese Zahl mit dem vierten Theil des gleichfalls in Linien ausgedrückten Durchmessers multiplicirt, wie hier folget, giebt den Flächeninhalt des Kreises.

$$\begin{array}{r} 1884''' \\ 150''' \\ \hline 94200 \\ 1884 \\ \hline 282600 \,\Box''' = 28\,\Box',\ 26\,\Box'' \end{array}$$

Wenn man durch die Verhältnißzahlen 1000 : 785 den Flächeninhalt eines Kreises sucht, dessen Durchmesser B 5 Schuh hält; so findet man ihn = 19 Quadratschuh und noch $\frac{625}{1000}$ eines Quadratschuhes. Da aber im Flächenmaße keine Tausendtheilchen vorkommen, sondern nur Hundert = Zehntausend = rc. Theilchen, so setzet man an den Zähler und Nenner des vorigen Bruches noch eine Null, wodurch man erhält: $\frac{6250}{10000}$ eines Quadratschuhes = 6250 Quadratlinien = 62 Quadratzoll, 50 Quadratlinien. Wie man hievon Anwendung auf jeden andern ähnlichen Fall zu machen habe, fällt von selbst in die Augen.

Anhang.

Da die Kinder — wohl auch häufig Erwachsene — Flächen nach ihrem Umfange zu beurtheilen pflegen, weil sie glauben, je größer oder kleiner der Umfang (Perimeter) einer Figur ist, desto größer oder kleiner müsse

ihr Flächenraum seyn: so trage man hier folgende Sätze im Zusammenhange vor, ohne sich auf die Beweise für ihre Allgemeingültigkeit einzulassen.

1) Figuren von sehr verschiedenem Umfange schließen oft gleiche Flächenräume ein. Hievon kann man Kinder am besten überzeugen, wenn man zwey Stücke von Nro. 14. erstlich so aneinander legt, daß sie ein Quadrat, zweytens so, daß sie einen Rhomboides bilden. Im ersteren Falle hält der Umfang — wenn man jeden Katheten dieser Dreyecke einen Schuh nennt — 4 Schuh, im zweyten aber weit mehr, weil alsdenn zwey Seiten dieses Rhomboides von der Hypotenuse, und nur zwey von den Katheten begrenzt werden, und die Hypotenuse alle Mahl länger ist, als einer der Katheten. Auch mit der neunten und zehnten Figur der neunten Tafel der ersten H. läßt sich dieß bestätigen. Der Umfang der erstern dieser gleich großen Figuren besteht aus acht gleichen Katheten von lauter gleichen Dreyecken. Der Umfang der letztern besteht aber aus vier Katheten und vier Hypotenusen von den nämlichen Dreyecken, muß also, wegen der größern Länge der Hypotenusen, auch mehr betragen, als der Umfang der erstern.

2) Figuren können bey einerley Größe der Umfangslinie, einen ganz ungleichen Flächeninhalt haben. Am augenscheinlichsten ist dieß beym schiefen Parallelogramm und Rechteck, wenn beyder Seitenlinien

gleich

gleich lang sind, wie Fig. A und B Tab. X. *) zeigen. Fig. A ist 7 Schuh hoch, und 4 Schuh breit, hält also 28 Quadratschuh; Fig. B ist 8 Schuh hoch und 4 Schuh breit, hält also 32 Quadratschuh **). Insbesondere ist — NB. Es ist hier durchaus von Figuren die Rede, die einerley Umfang haben —

a) ein Rechteck desto größer, je weniger die Seiten von einander verschieden sind. Das Quadrat hat also die größte Fläche. Dieß bestätigen Fig. B und C. Jede der kürzern Seiten von B hält 4, jede der längern 8 Schuh, das ganze Parallelogramm also 32 Quadratschuh. Bey C hält jede der kürzern Seiten 5, jede der längern 7 Schuh, es sind folglich hier die Seiten weniger von einander verschieden, als bey B, und daher hält

*) Auf dieser Tafel haben die Figuren alle, den Kreis ausgenommen, gleichen Umfang, nämlich 24 Schuh, und sind nach dem Maßstabe ab, welcher = 12 Schuh angenommen wird, verzeichnet. Damit dieses gleich in die Augen falle, sind die Seiten alle in Schuhe abgetheilt.

**) Auch mit Nro. 5. meines Versinnlichungs-Apparats kann man obigen Satz bestätigen, wenn man aus den vier Stäben ein Rechteck bildet und dieses nach und nach zu einem immer schiefern Parallelogramme verschiebt. Denn hiebey läßt sich sehr leicht bemerken, wie der von den Stäben eingeschlossene Raum immer kleiner wird, obgleich der Umfang derselbe bleibt.

hält dieses Parallelogramm auch 35 Quadratschuh. Das Quadrat D hingegen hat deren 36, hält also unter den Parallelogrammen von A bis D den größten Flächenraum.

b) Wenn bey gegebenen Umfange auch die Grundlinie bestimmt ist, so hat ein Dreyeck eine so viel größere Fläche, je weniger die beyden übrigen Seiten von einander verschieden sind, mithin ist das gleichschenkliche daß größte. Dieß bestätigen die Dreyecke E F und G, wovon keines zwischen den nämlichen Parallelen steht, zwischen welchen das andere steht, die also von verschiedener Höhe sind. Bey jedem derselben ist die Grundlinie = 6 Schuh angenommen, und bey F sind die übrigen beyden Seiten weniger von einander verschieden, als bey E, daher aber auch F höher als E, mithin auch größer als dieses ist, da beyde gleiche Grundlinien haben. Am höchsten ist, wie der Augenschein lehrt, das Dreyeck G, welches mit den beyden vorhergehenden gleiche Grundlinie hat, aber gleichschenklich ist.

c) Das gleichseitige Dreyeck hat unter allen (Dreyecken) von gleichem Umfange die größte Fläche. Dieser Satz wird hier, wo man die Höhen und Grundlinien vor den Augen der Kinder messen muß, durch folgende Rechnung bestätigt: das Dreyeck G ist 8 Schuh, 9 Zoll hoch und an der Grundlinie 6 Schuh breit, hält folglich 26 Quadratschuh,

70 Quadratzoll. Das gleichseitige Dreyeck H ist 7', 1" hoch, und an der Grundlinie 8' breit, hält folglich 28 Quadratschuh, 40 Quadratzoll. Hieraus erhellet, daß das Dreyeck H größer, als das größte von den übrigen dreyen, mithin das größte unter allen von E—H von einerley Umfang verzeichneten Dreyecken ist.

d) Das reguläre Polygon, welches mehr Seiten hat, ist größer, als das von weniger Seiten, bey gleichem Umfange. Diesen Satz bestätigen folgende Rechnungen: Die Linie ab Fig J ist 3', 6", cd aber 4 Schuh lang, folglich hält der Triangel acd 720 Quadratzoll, das ganze Sechseck also 6 × 720 = 4320 Quadratzoll = 43 Quadratschuh, 20 Quadratzoll. Die Linie ab Fig K. ist 3', 7", die cd 2' lang, folglich enthält der Triangel acd einen Flächenraum von 370 Quadratzoll, das ganze Zwölfeck faßt also 12 × 370 Quadratzoll = 4440 Quadratzoll = 44 Quadratschuh, 40 Quadratzoll in sich.

e) Unter allen geradlinigten Figuren, die gleich viel Seiten haben, hat die reguläre Figur die größte Fläche. Dieses bestätigt das Quadrat D, (als eine reguläre Figur,) verglichen mit A, B und C; und das Dreyeck H, (ebenfalls eine reguläre Figur,) verglichen mit E, F und G.

f) Der Kreis schließt einen grössern Flächenraum ein, als jede geradlinigte Figur von gleichem Umfange. Dieß

Dieß erhellet aus folgender Berechnung: der Durchmesser des Kreises L ist = 7', 6'', 4'''. Daraus ergiebt sich seine Peripherie wenn man rechnet:

$$1000 : 314 = 764'''$$

$$\begin{array}{r} 764 \\ \hline 1256 \\ 1884 \\ 2198 \\ \hline \end{array}$$

$100 | 2398 | 96$ d. h. die Peripherie des Kreises L hält $2398\frac{96}{100}$ Linien = 23', 9'' 8''' und noch $\frac{96}{100}$ einer Linie. Es fehlt folglich dieser Peripherie nur $1\frac{96}{100}$ Linie von 24 Schuh, daher sie billig = 24' angenommen wird. Nach dieser Annahme enthält der Kreis L 45 □', 84'' wie diese Rechnung lehrt.

Durchmesser = 764''', folglich $\frac{1}{4}$ desselben = 191'''

Pheriph. = 2400'''

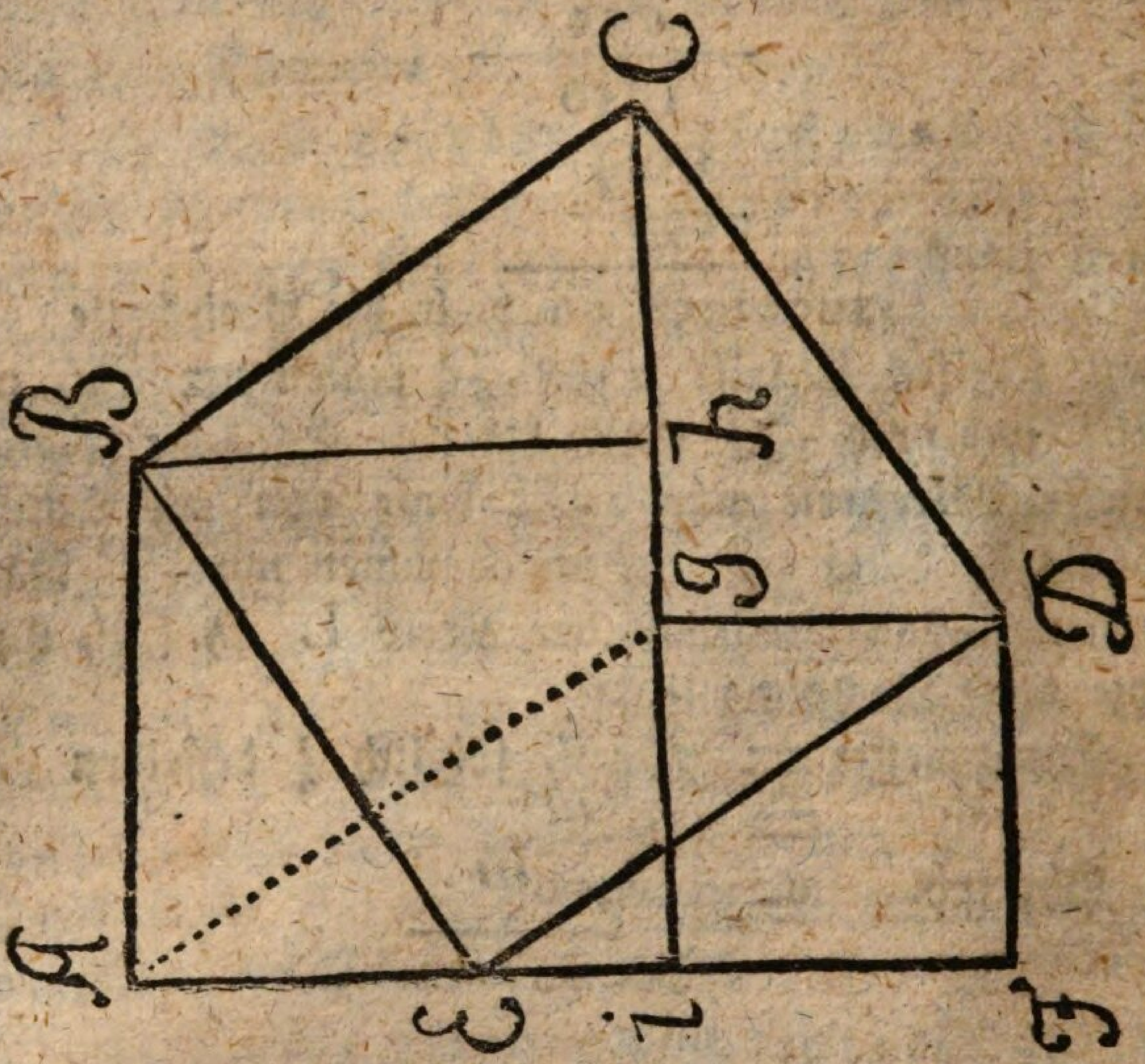
$$\begin{array}{r} 76400 \\ 382 \\ \hline \end{array}$$

Flächeninh. = 458400 □''' = 45□', 84□''.

Dieses Resultat zeigt, daß der Kreis L unter allen den auf Tab. X. verzeichneten Figuren, die alle gleichen Umfang (Perimeter) haben, indem wir den kleinen Unterschied am Kreise hier, wo es nicht auf den schärfsten math. Beweis abgesehen ist, nicht beachten, den größten Flächenraum einschließt.

Nachtrag zum 46sten Satze.

Wenn der in diesem Satze gegebene Beweis für den Pythagorischen Lehrs. Kindern zu schwer seyn sollte, so versuche man folgenden zu geben:



A i g sey ein rechtwinklichtes Dreyeck, A i der längere, i g der kürzere Kathet, und A B h i das Quadrat der längern, i g D F aber das Quadrat der kürzern der erst genannten Linien, folglich A i + i F die Summe der beyden Katheten. Nun trage man den kürzern Katheten von A nach E und ziehe die E D und die E B. Hierauf verlängere man die i h unbestimmt, und trage von h nach C den kürzern Katheten, wodurch man in i h + h C wie-

wiederum die Summe der 2 Katheten bekommt, und ziehe dann die DC und die BC.

Nun ist 1) $\triangle$ EAB $\cong$ $\triangle$ Aig; denn
$\angle$ A im $\triangle$ BAE $=$ $\angle$ i im $\triangle$ Aig, weil beyde rechte W. sind.

AE $=$ ig
AB $=$ Ai } vermöge der Construction.

Es sind folglich zwey Seiten mit dem dazwischen liegenden Winkel in dem einen dieser Triangel so groß, als diese Stücke in dem andern.

2) $\triangle$ BhC $\cong$ $\triangle$ Aig; denn
$\angle$ BhC $=$ $\angle$ Aig, weil beyde rechte W. sind, indem $\angle$ BhC als der Nebenwinkel eines rechten auch ein rechter seyn muß.

Bh $=$ Ai
hC $=$ ig } verm. d. Constr.

3) $\triangle$ EFD $\cong$ $\triangle$ Aig; denn
$\angle$ F $=$ $\angle$ Aig, weil beyde rechte W. sind.
EF $=$ Ai weil, wenn man von AF, der Summe der beyden Katheten des Fundamental-Dreyecks Aig, in AE den kleinern abzieht, der größere in EF übrig bleiben muß.
FD $=$ ig vermöge der Construction.

4) Das Dreyeck gCD $\cong$ $\triangle$ Aig; denn
$\angle$ g als der Nebenw. eines rechten ist gleich dem rechten W. Aig.

gC = Ai, weil iC die Summe der beyden Katheten des Fundamental-Dreyecks, und ig der kleinere, folglich gC der größere ist.

gD = ig vermöge der Construction.

Da nun die 4 Dreyecke AEB, EFD, BhC, gDC dem Dreyecke Aig gleich und ähnlich sind, so müssen sie auch alle unter einander congruent, folglich △ EFD + △ AEB = △ BhC + △ gDC seyn, indem ja Gleiches zu Gleichen addirt gleiche Summen giebt.

Ferner ist die Figur BCDE ein Quadrat, denn sie hat 4 gleiche Seiten und 4 rechte Winkel.

1) Vier gleiche Seiten; denn jede derselben ist die Hypotenuse eines und des nämlichen Dreyecks. Ein Viereck, dessen gegenüberstehende Seiten einander gleich sind, ist aber ein Parallelogramm, folglich ist BCDE ein Parallelogramm.

2) Vier rechte Winkel; denn < hBC = < EBA, weil dieß Winkel sind, die in 2 Congruentendreyecken gleichen Seiten gegen über liegen.

Addirt man nun den Winkel EBh zu dem Winkel hBC, so muß die Summe so groß seyn, als wenn man ihn zu EBA addirt. Nun ist aber < hBE + EBA = L, weil ja ihBA ein Quadrat ist; es muß folglich < hBC + hBE auch = L seyn. Ist aber in einem Parallelogramm Ein Winkel ein rechter, so müssen die übrigen

gen auch rechte seyn (S. 104. d. erst. H.). Die Größe EBhgDE ist sich selbst gleich, folglich muß sie vereinigt mit EBA + EDF die nämliche Summe geben, die sie giebt, wenn man sie mit BhC + gCD vereinigt, da Gleiches zu Gleichem addirt ꝛc. Nun bildet aber die Fläche EBhgDE in ihrer Vereinigung mit EBA + EFD die Quadrate der beyden Katheten des Dreyecks Aig, so wie BCDE das Quadrat der Hypotenuse dieses Dreyecks ist. Es ist folglich das Quadrat der Hypotenuse gerade so groß, als die Quadrate der beyden Katheten.

Wenn man sich die 2 Dreyecke EAB und EFD, so wie die Figur EBhgDE von Holz machen läßt, so kann man den eben geführten Beweis den Kindern recht gut versinnlichen. Denn wenn man die Dreyecke EAB und EFD so, wie der hier beygefügte Holzschnitt zeigt, an die Figur EBhgDE legt; so hat man die 2 Quadrate der beyden Katheten. Legt man sie aber herüber auf die andere Seite, so daß sie die Lage von BhC und gDC erhalten, so bekommt man das Quadrat der Hypotenuse. In beyden Fällen ist einerley Flächenraum vorhanden, folglich der in Rede stehende Lehrsatz dadurch bestätigt.

Von nun an lege ich diese 3 Stücke unter Nro. 19. meinem Versinnlichungsapparate bey. — Die Seiten, die jedes Mahl aneinander gelegt werden müssen, sind mit einerley Ziffern bezeichnet.

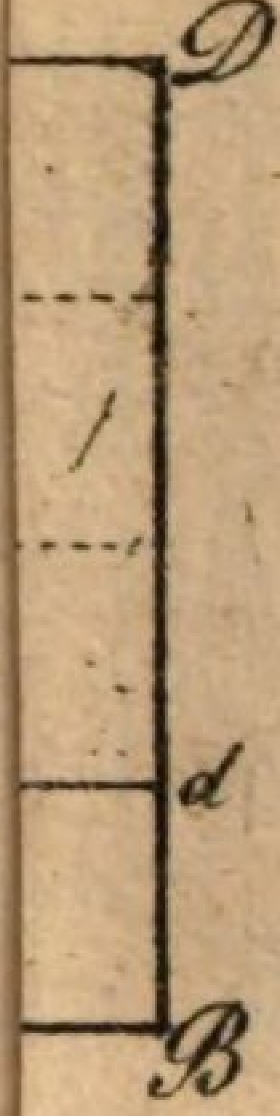
Ende der 2ten Hälfte des 2ten Bändchens.

Druckfehler.

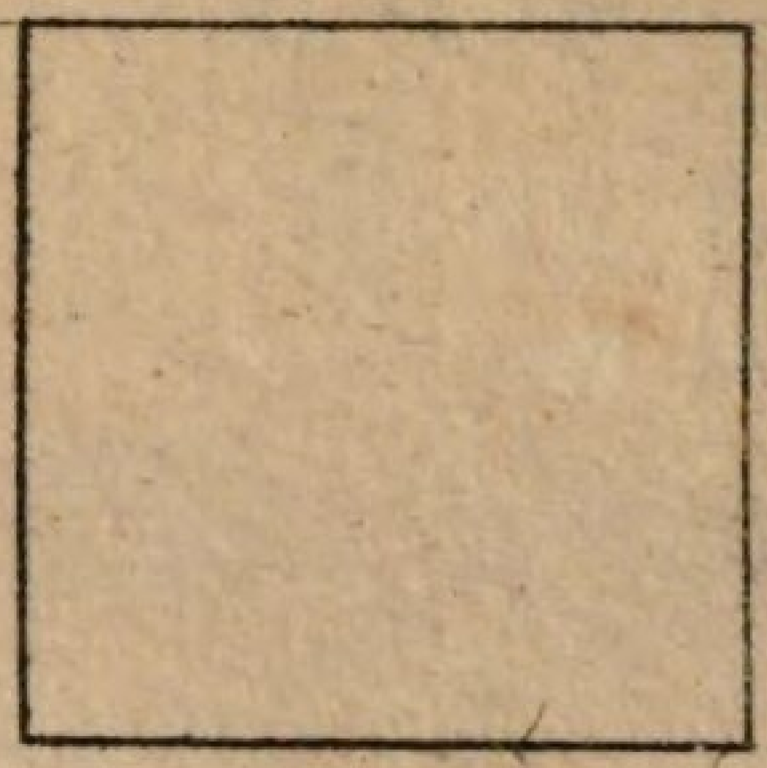
Seite 137. der ersten Hälfte dieses Bändchens, Z. 9. schalte nach A C F ein: (Fig. 3.); 2) mit diesem Vierecke hier (zeigend) das Dreyeck B E G.

2te Hälfte.

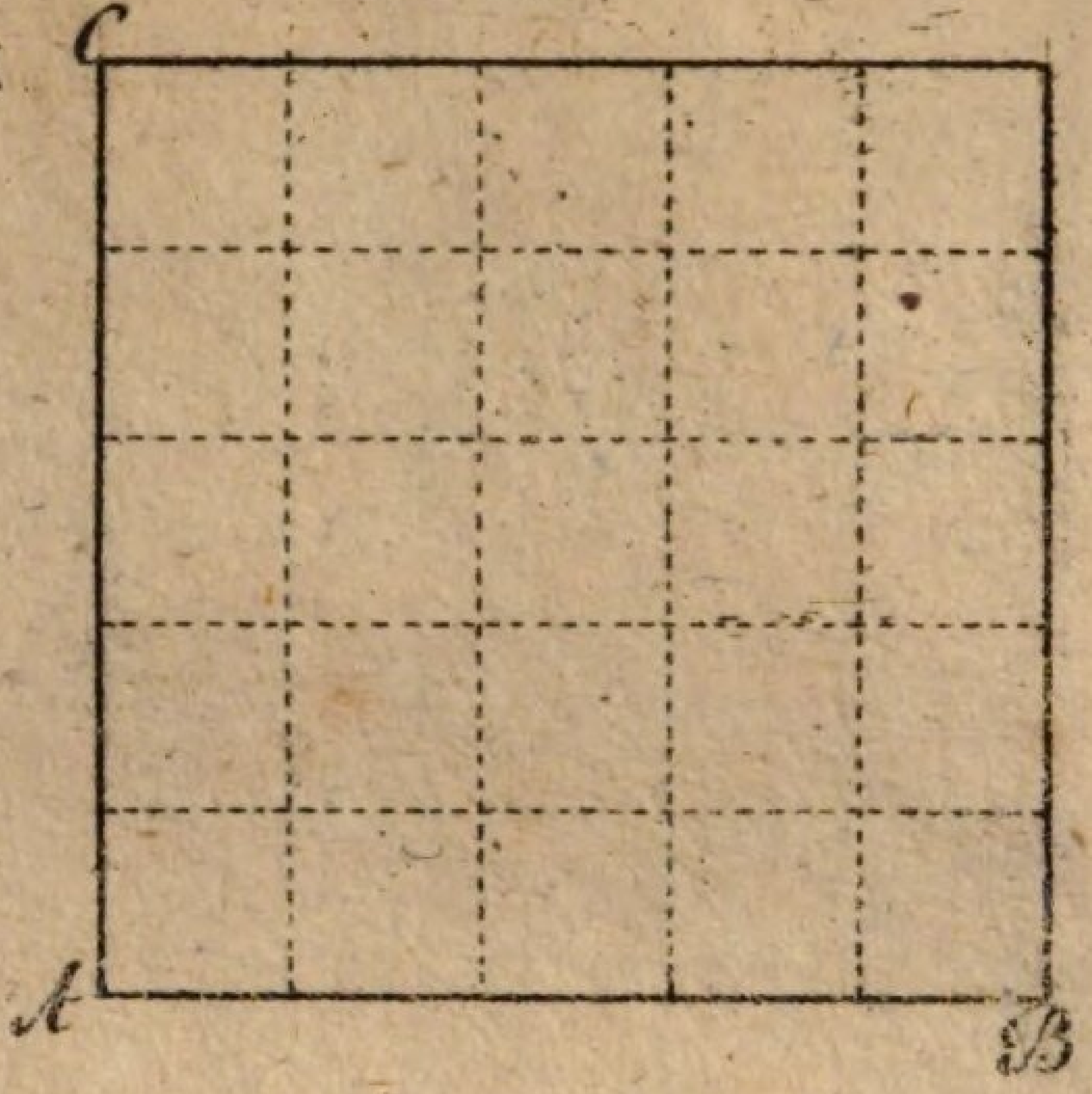
S. 2. Z. 3. von unten lies auf st. auſ.
— — — 2. — — — eine große schwarze st. einer großen schwarzen.
— — — 1. — — — einen Tisch st. einem Tische.
S. 4. Z. 11. v. u. lies dieses st. dises.
S. 7. Z. 5. v. u. streiche nach wäre das Comma weg.
S. 147. Z. 9. v. u. lies AF st. HF.
— — — 6. — — setze sowohl zwischen A B als X Y ein Comma.
S. 148. Z. 2. v. o. setze P st. R.
— — — 3. — — setze S 1 st. S r.
— — — 5. — — lies 9 A st. 9 H.
— — — 17. — — lies aq st. oq.

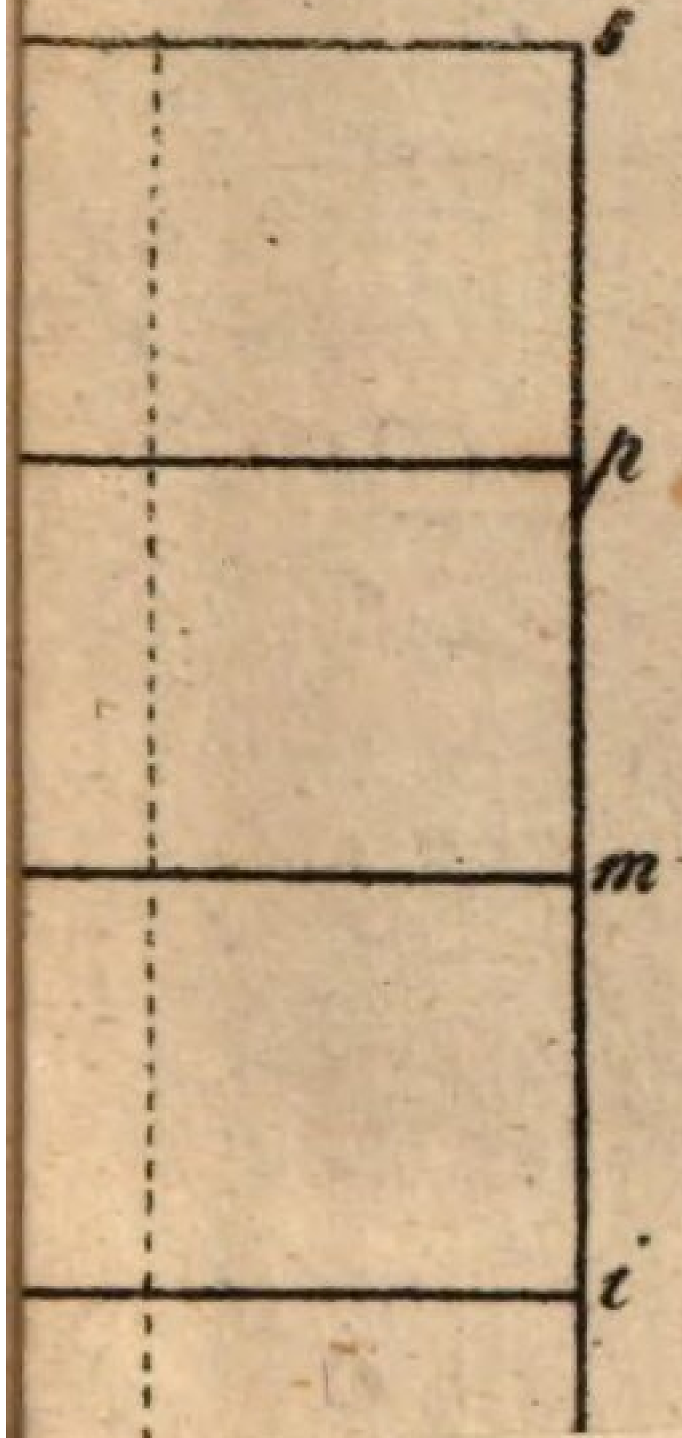


F. 4.

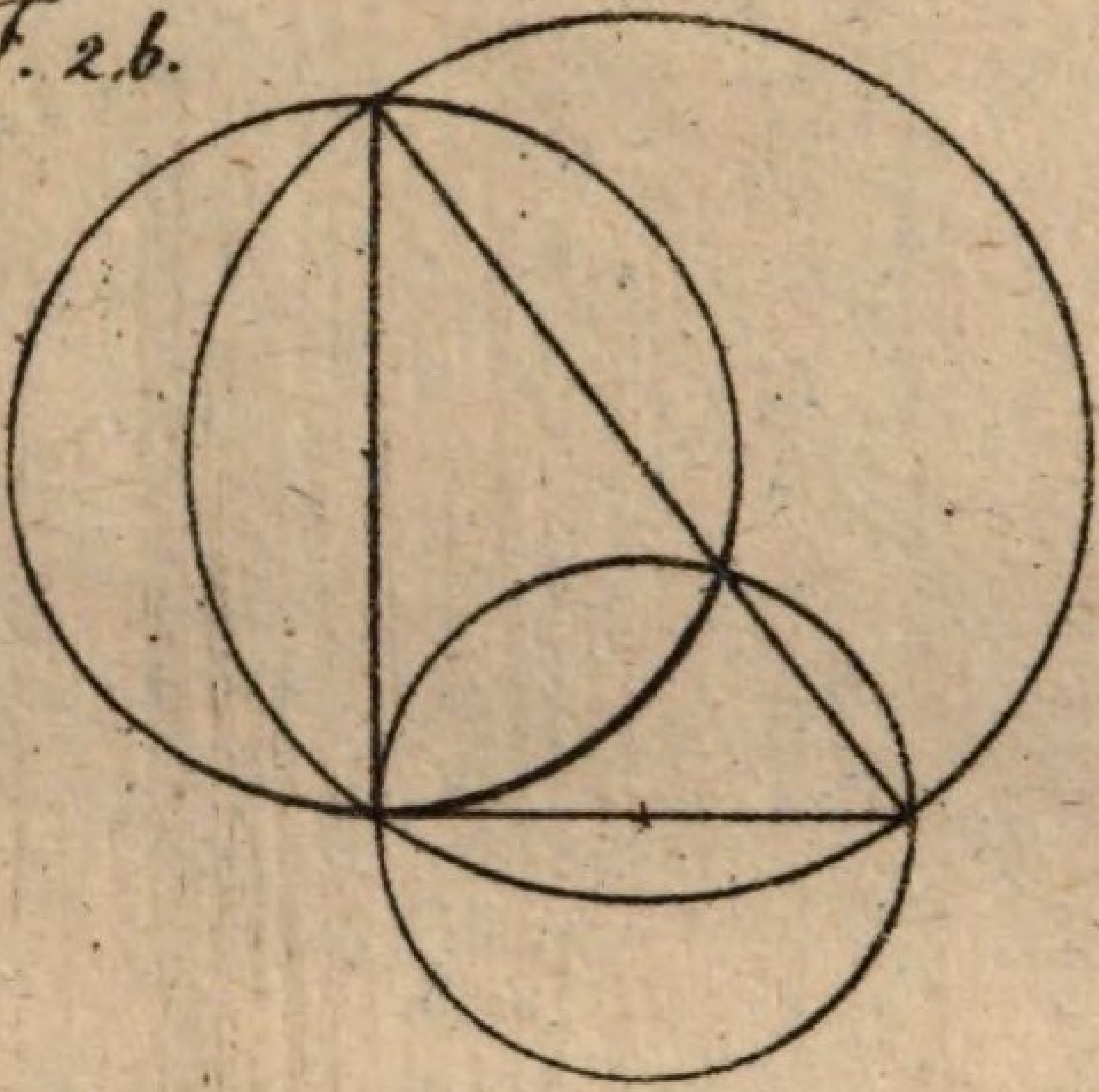


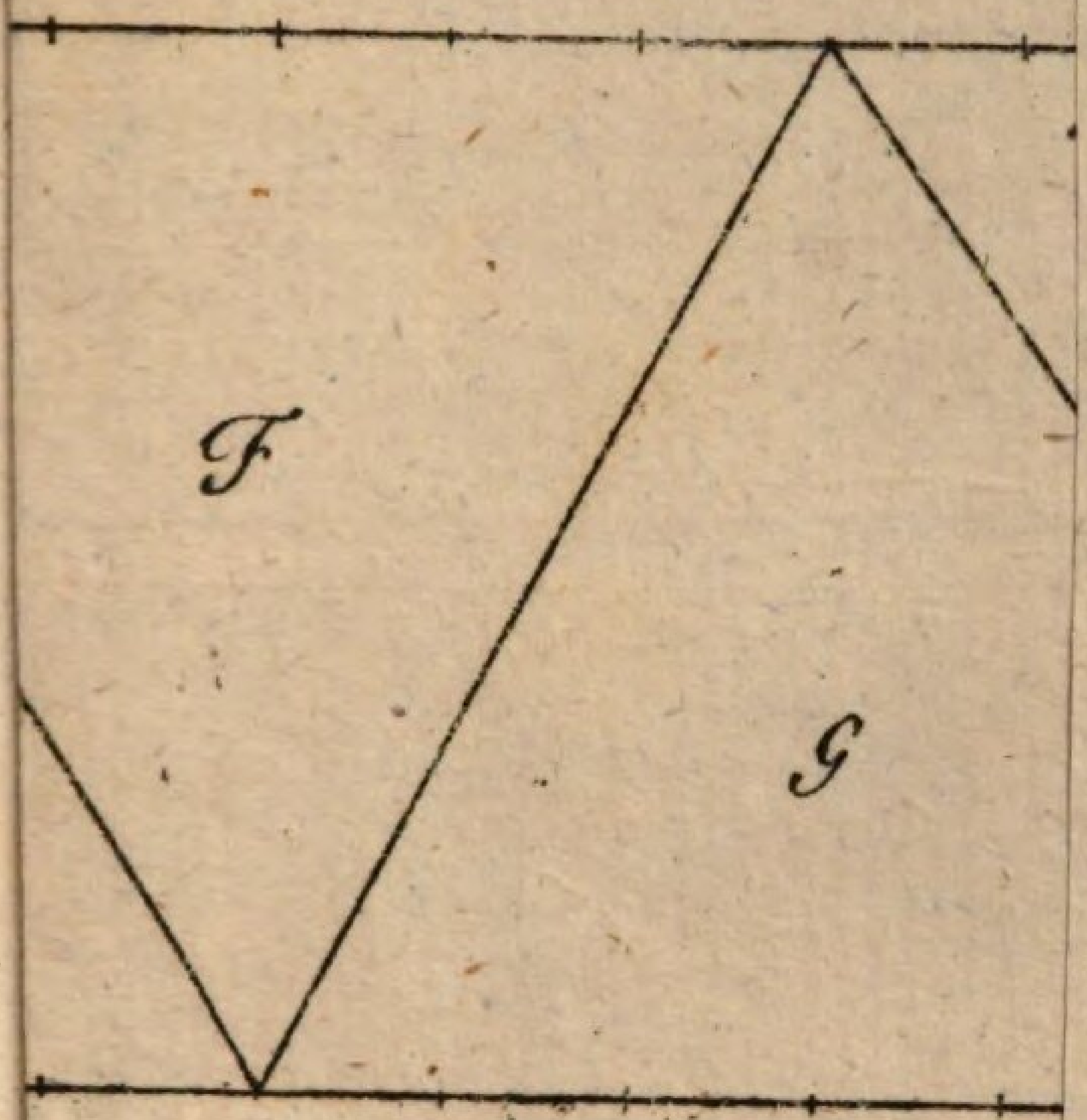
F.5.



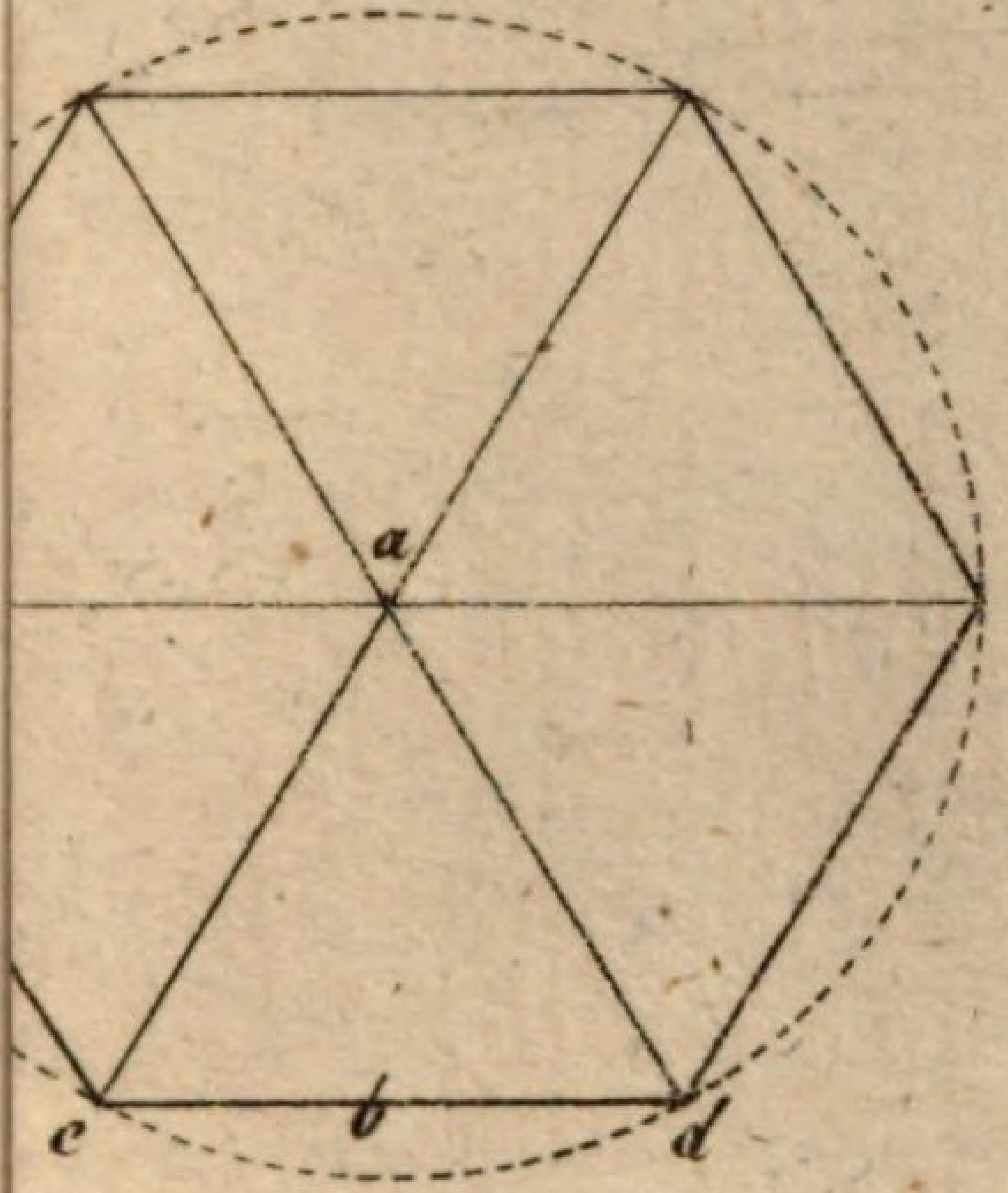


F. 2.b.



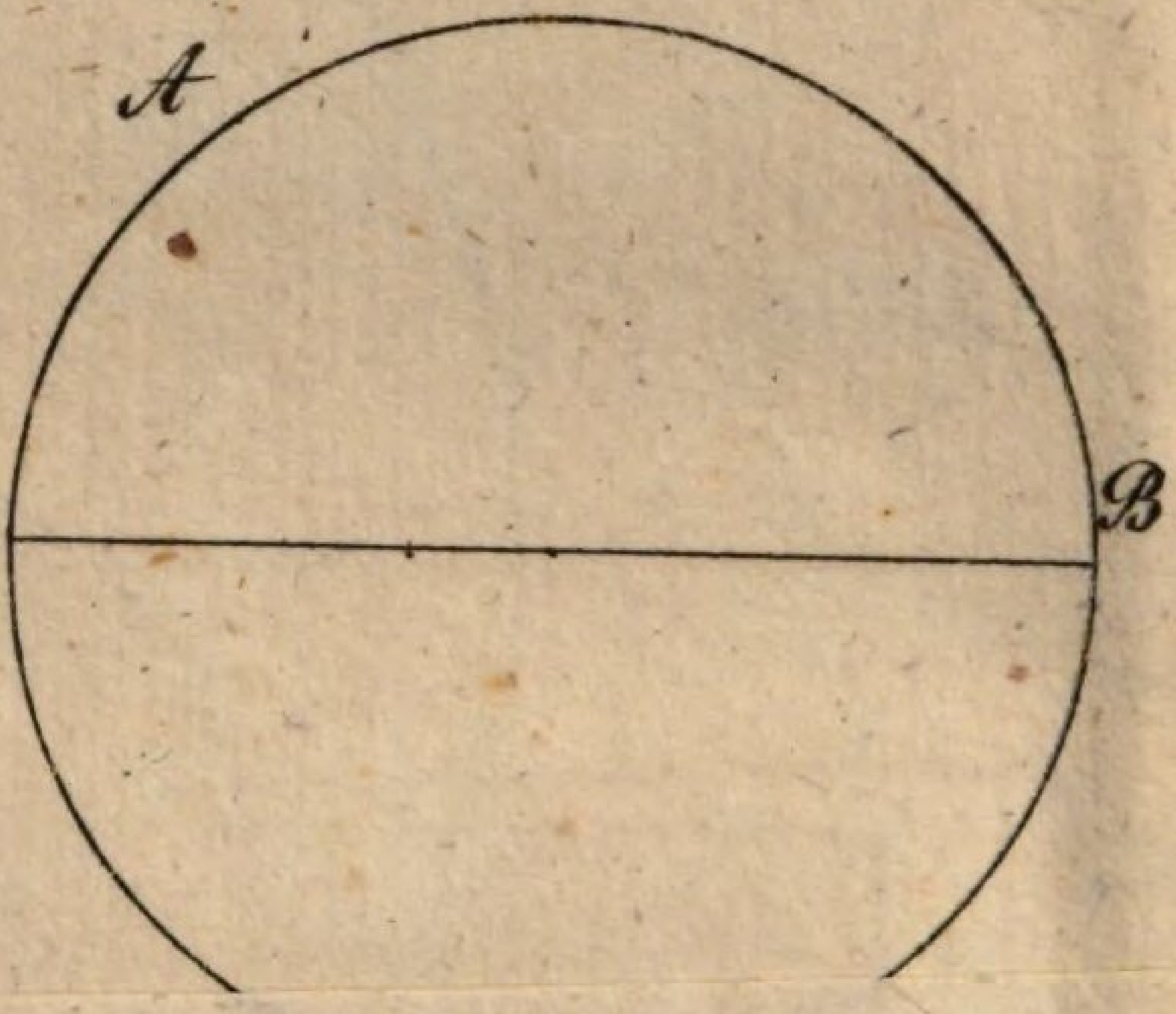


F
G

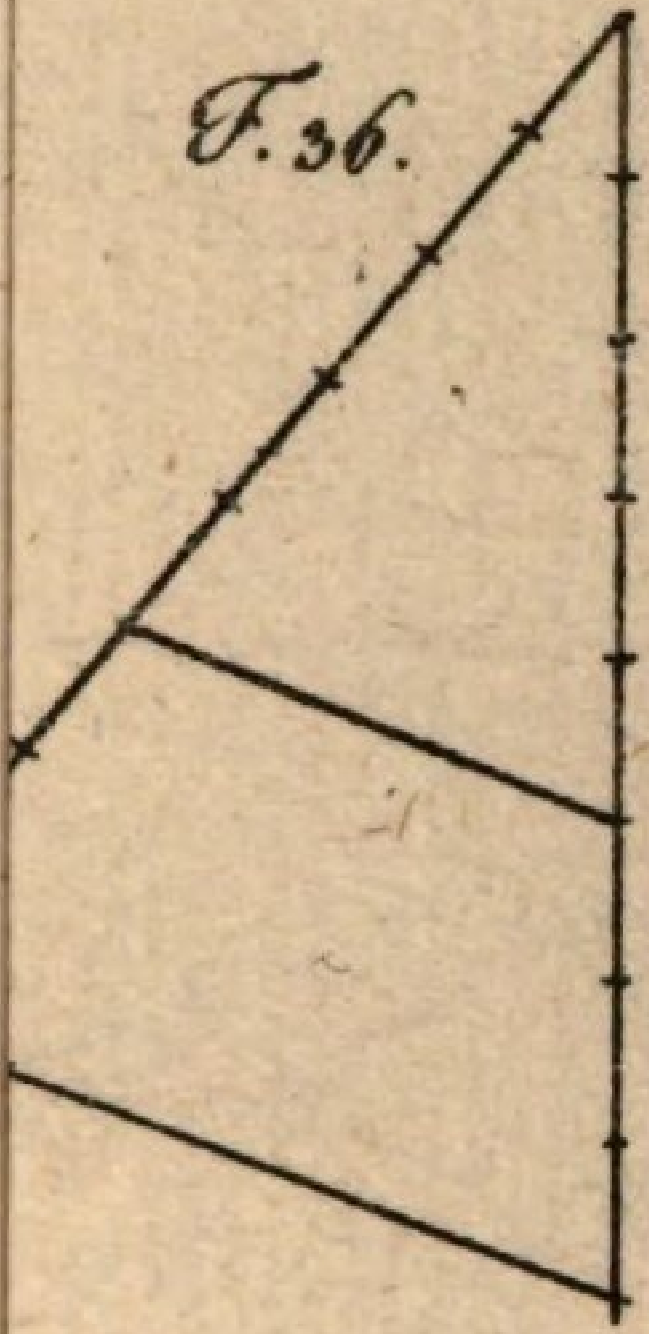


a
b
c
d

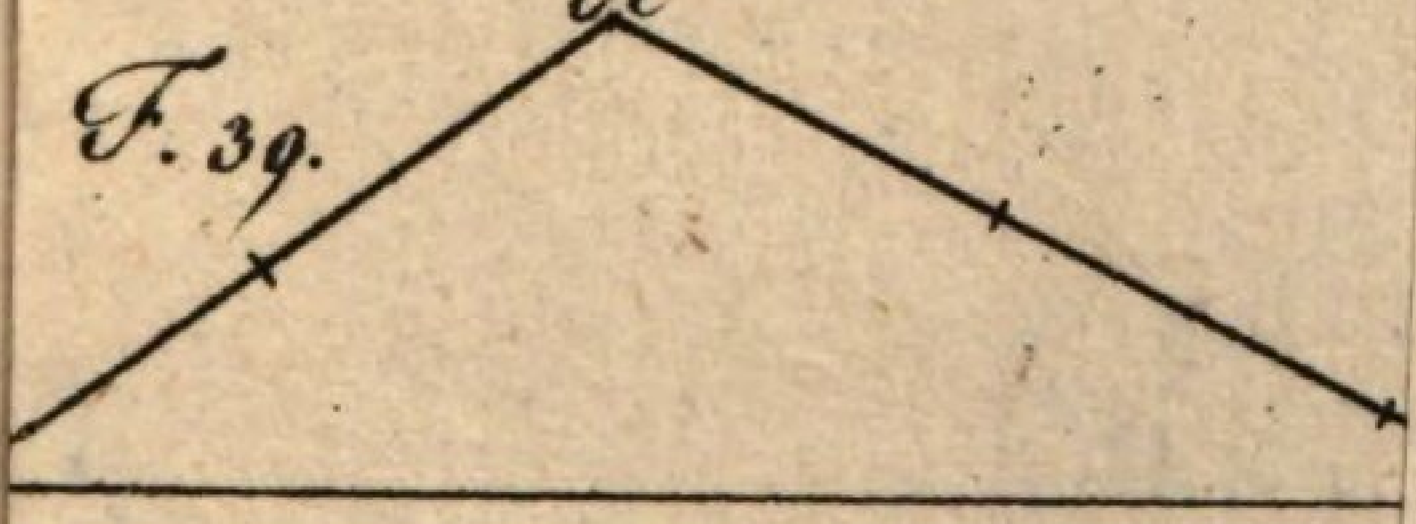
F. 31.



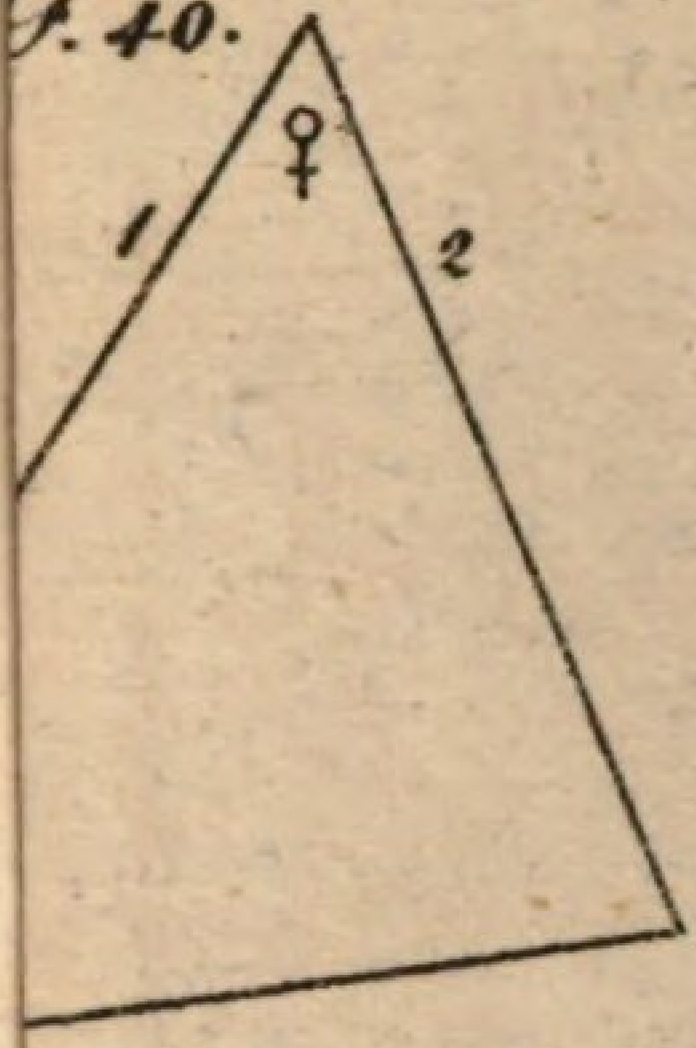
F. 36.



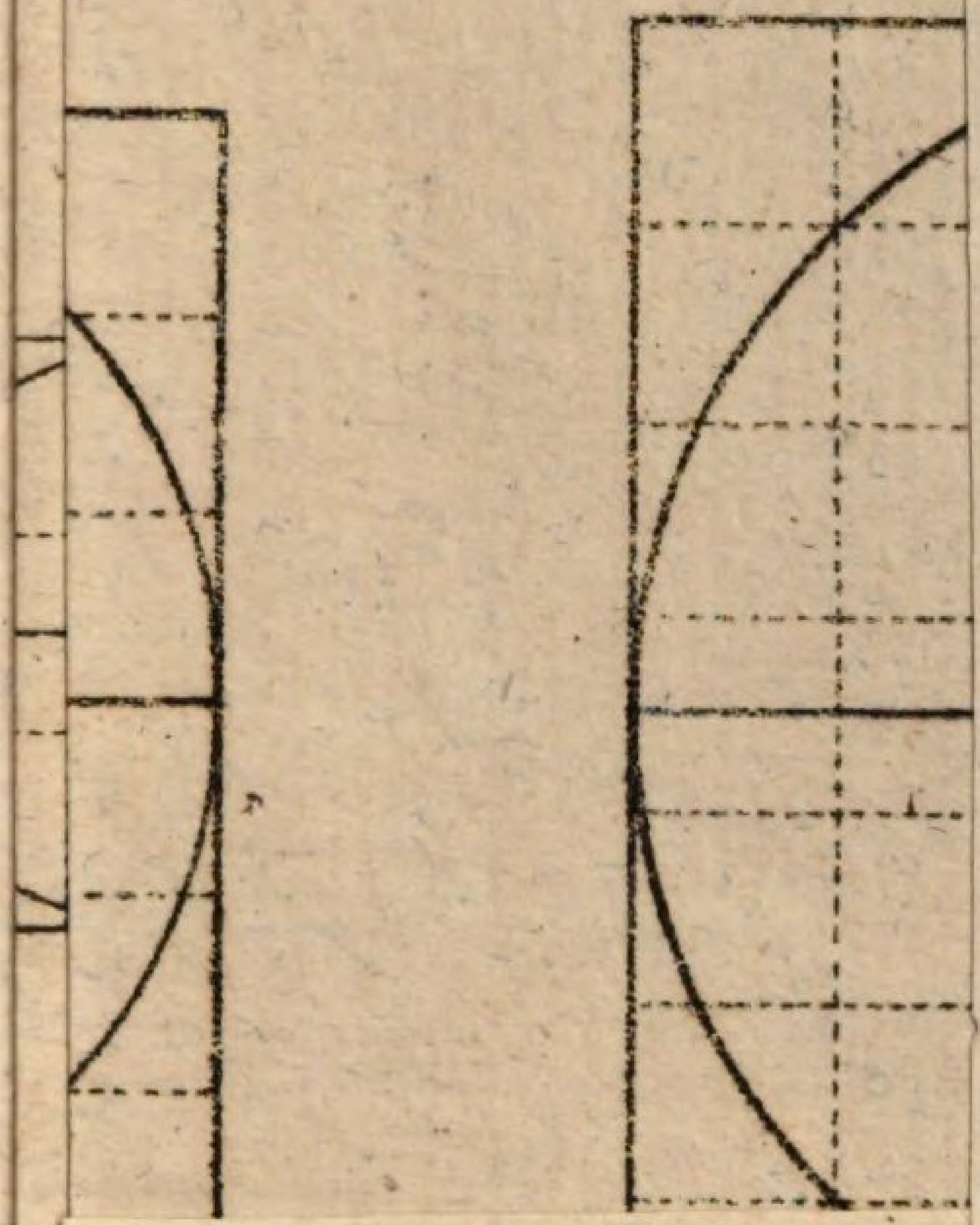
F. 39.

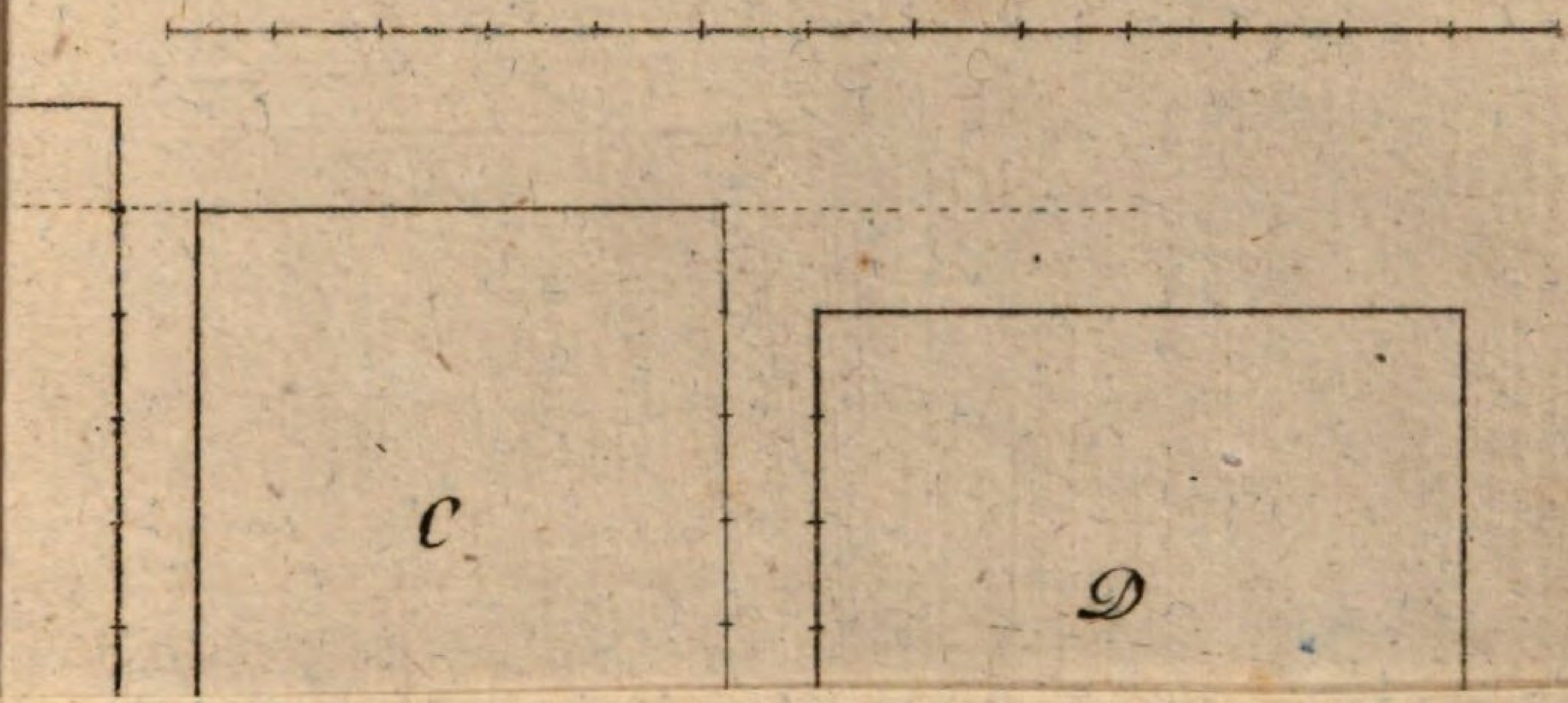


F. 40.



F. 66.




C
D

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Pöhlmann, Johann Paul,

Die ersten Anfangsgründe der Geometrie als Stoff zu Denk- und Sprechü
bungen benützt zum Gebrauche für ungeübte Lehrer in Bürgerschulen und den
untern Classen der Gymnasien herausgegeben
Bd.: 2,2. (1806)

Fürth 1806

Regensburg, Staatliche Bibliothek -- 999/Philos.2517
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11111261-6